

**Министерство образования и науки Украины  
Донбасская государственная машиностроительная академия**

**В.М.Костенко,  
В.Н.Тулупенко**

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА.  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.  
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.  
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА»  
(для студентов всех специальностей вуза)**

Утверждено на заседании  
ученого совета ДГМА  
Протокол № от

**Краматорск 2007**

**УДК 535**  
**ББК 22.33**  
**Э 55**

Рецензенты:

**Левченко Г.Г.**, доктор физ.-мат. наук, зав. отделом фазовых превращений Физико-технического института НАН Украины, г.Донецк;

**Надточий В.А.**, доцент, зав. кафедрой физики Славянского государственного педагогического университета

Даний методичний посібник містить теоретичний матеріал, який викладається в лекційному курсі студентам технічних спеціальностей ДДМА. Частина матеріалу призначена для самостійного вивчення студентами.

**В.М.Костенко, В.Н.Тулупенко**

Э 55 Электростатика. Электрический ток. Электромагнетизм. Колебания и волны : курс лекций по дисциплине «Физика» (для студентов всех специальностей вуза). – Краматорск : ДГМА, 2007. – 80 с.

**ISBN .....**

Данное методическое пособие содержит теоретический материал, излагаемый в лекционном курсе студентам технических специальностей ДГМА. Часть материала предназначается для самостоятельного изучения студентами.

**УДК 535**  
**ББК 22.33**

**ISBN .....**

© В.М.Костенко, В.Н.Тулупенко, 2007  
© ДГМА, 2007

## СОДЕРЖАНИЕ

### 1 ЭЛЕКТРОСТАТИКА

#### 1.1 Электрические заряды, их свойства. Точечные заряды.

Закон Кулона.....5

#### 1.2 Напряжённость электростатического поля. Принцип суперпозиции для электростатического поля.....6

#### 1.3 Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля. Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле.....8

#### 1.4 Потенциал электростатического поля. Связь потенциала с напряжённостью электростатического поля.....10

#### 1.5 Теорема Гаусса для напряжённости электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах.....12

#### 1.6 Вычисление напряженностей полей с помощью теоремы Гаусса.....14

#### 1.7 Поле диполя. Дипольный момент.....17

#### 1.8 Диэлектрики. Полярные и неполярные молекулы .....19

#### 1.9 Объемные и поверхностные заряды диэлектрика. Вектор электрического смещения.....20

#### 1.10 Условия на границе раздела двух диэлектриков.....23

#### 1.11 Сегнетоэлектрики.....25

### 2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

#### 2.1 Электрический ток проводимости. Сила тока.....27

#### 2.2 Условия существования электрического тока. Источники тока. Электродвижущая сила.....29

#### 2.3 Напряжение на участке цепи. Законы Ома для участка цепи и полной цепи. Правила Кирхгофа.....30

#### 2.4 Вектор плотности тока. Закон Ома в дифференциальной форме.....33

#### 2.5 Элементы классической электронной теории металлов.....35

### 3 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

#### 3.1 Магнитное поле и его характеристики. Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции для магнитного поля.....38

#### 3.2 Расчет магнитного поля для бесконечно длинного прямолинейного проводника и в центре кругового тока.....44

#### 3.3 Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока. Расчет

полей бесконечно длинного соленоида и тороида.....	45
3.4 Контур с током в магнитном поле.....	49
3.5 Теорема Гаусса для магнитного поля. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.....	51
3.6 Сила Лоренца. Эффект Холла.....	53
3.7 Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея.....	56
3.8 Самоиндукция. Экстратоки размыкания и замыкания цепи.....	59
3.9 Взаимная индукция. Трансформаторы. Энергия магнитного поля.....	62
3.10 Магнитные моменты электронов и атомов. Намагниченность вещества. Диа- и парамагнетики.....	65
3.11 Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля. Ферромагнетики.....	67
3.12 Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла.....	72
<b>4 КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ</b>	
4.1 Колебания. Типы колебаний. Характеристики колебаний. Гармонические колебания.....	77
4.2 Метод векторных диаграмм. Сложение гармонических сонаправленных и взаимно перпендикулярных колебаний.....	80
4.3 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Физический и математический маятники.....	85
4.4 Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и анализ его решений.....	87
4.5 Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и анализ его решений. Резонанс.....	89
4.6 Общие свойства волн. Уравнение волны.....	94
4.7 Волновое уравнение.....	98
4.8 Скорость распространения волны в упругой среде.....	100
4.9 Скорость распространения волны в газе.....	103
4.10 Перенос энергии упругой волной. Интенсивность волны.....	105
4.11 Интерференция волн. Стоячие волны.....	108
4.12 Волновой пакет. Групповая скорость волн.....	110
4.12 Электромагнитные волны.....	112
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>115</b>

# 1 ЭЛЕКТРОСТАТИКА

## 1.1 Электрические заряды, их свойства. Точечные заряды.

### Закон Кулона

Учение об электрических и магнитных явлениях начинаем с электростатики. Электростатика – раздел физики, который изучает взаимодействие между неподвижными зарядами. Известно, что существуют два типа электрических зарядов. Их условно назвали положительными и отрицательными. Наименьшим отрицательным зарядом является заряд электрона:  $e=1.6*10^{-19}$  Кл. Точно такой же по величине, но положительный заряд имеет протон – ядро атома водорода. Все остальные заряды целочисленно кратны этому заряду. Необходимо отметить, что заряд – это релятивистский инвариант. Это означает, что заряд, например, электрона не зависит от скорости его движения. Макроскопические тела состоят из огромного количества зарядов разного знака, но обычно суммарные заряды тел равны нулю, т.е. в целом они являются электронейтральными. Процесс заряда тела или его части заключается в удалении части зарядов одного знака. Но в целом действует закон сохранения электрического заряда: *алгебраическая сумма зарядов замкнутой системы (т.е. не обменивающейся зарядами с другими телами) остаётся постоянной при любых изменениях, происходящих с этой системой.*

Электростатика оперирует понятием точечного заряда. Точечный – это заряд, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Для точечных зарядов Ш.О.Кулон установил в 1785 г. закон взаимодействия, который мы сейчас называем законом Кулона: *два точечных заряда взаимодействуют между собой с силой, действующей вдоль прямой, соединяющей заряды, пропорциональной величинам зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними, таким образом, что одноименные заряды отталкиваются, а разноимённые заряды притягиваются:*

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная. Для показанных на рис. 1.1 зарядов формулу (1.1)

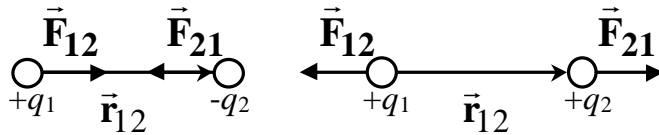


Рисунок 1.1

записывают в векторном виде следующим образом

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (1.2)$$

Протяженные заряженные тела можно мысленно разделять на малые участки и считать системами точечных зарядов.

## 1.2 Напряжённость электростатического поля. Принцип суперпозиции для электростатического поля

Электрические заряды взаимодействуют между собой посредством силового поля, которое в нашем случае неподвижных электрических зарядов называется электростатическим. Подчеркнём, что поле – это физическая реальность, а не абстракция, придуманная физиками для описания взаимодействия между заряженными телами.

Проведём мысленный эксперимент. Пусть у нас есть заряд  $Q$ , который создаёт вокруг себя электрическое поле. Поместим на расстоянии  $r$  от нашего заряда заряд  $q_1$ . В соответствии с законом Кулона на заряд  $q_1$

будет действовать сила  $F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_1}{r^2}$ . Уберём заряд  $q_1$  и в это же место

поместим заряд  $q_2$ . На него будет действовать сила  $F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_2}{r^2}$ . И

сколько бы мы не продолжали опыт, помещая в одно и то же место разные заряды  $q_i$ , величина силы, действующей на этот, пробный заряд, зависит от величины заряда:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_1}{r^2},$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_2}{r^2},$$

.....

$$F_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_i}{r^2},$$

.....

Однако, как нетрудно видеть, отношение силы, действующей на заряд, помещённый в данную точку поля, к величине этого заряда, не зависит от величины этого заряда и является одним и тем же для всех зарядов.

$$\frac{F_1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

$$\frac{F_2}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

.....

$$\frac{F_i}{q_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

.....

Таким образом, это отношение может служить характеристикой поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$  в данной точке, и эта характеристика называется **напряжённостью поля** в данной точке и определяется как

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.3)$$

Из формулы (1.3) следует определение напряженности поля – **это есть сила, действующая на единичный положительный заряд, помещённый в данную точку поля**. Подчеркнём, что напряжённость поля – это есть основная, силовая характеристика поля. Размерность напряжённости  $[E] = \frac{Н}{Кл}$ . Чаше используется, однако, другая размерность, эквивалентная первой, а именно – **полное название** (В/м). Напряжённость

поля точечного заряда  $q$ , как это следует из приведенного вывода, определяется как

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.4)$$

Направление вектора  $E$  в данной точке поля будет направлено от положительного заряда **и** к отрицательному заряду. Графически электростатическое поле изображают при помощи линий напряжённости – это линии, касательная к которым в каждой точке поля совпадает по направлению с напряжённостью поля в данной точке.

Из опыта известно, что *если поле в некоторой точке создаётся системой точечных зарядов, то результирующая напряжённость равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов в отдельности.* Это положение называется *принципом суперпозиции для электростатического поля*

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (1.5)$$

### 1.3 Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля. Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле

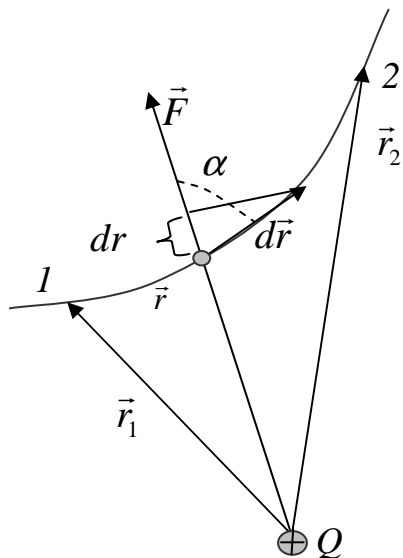
Посмотрим, как определяется работа по перемещению точечного заряда  $q$  в электростатическом поле, создаваемом зарядом  $Q$ . В соответствии с определением элементарной работы:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dr.$$

В последнем равенстве мы учли, что  $dl \cos \alpha = dr$  (рис. 1.2). (На этом рисунке, для определённости, мы положили оба заряда положительными.)



Тогда работа по перемещению заряда между начальным положением 1 и конечным положением 2 будет определяться как



$$A_{12} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.6)$$

Из последнего соотношения видно, что работа не зависит от формы пути между начальным и конечным положениями заряда, а определяется только этими положениями, и, следовательно, работа по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю.

Эту же работу можно записать иначе, используя определение напряжённости электростатического поля

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \oint q\vec{E} d\vec{r} \equiv 0. \quad (1.7)$$

Поскольку заряд не равен нулю, то его в последнем равенстве можно сократить

$$\oint \vec{E} d\vec{r} \equiv 0. \quad (1.8)$$

Интеграл в левой части выражения (1.8) называется **циркуляцией вектора напряжённости**. Таким образом, получили, **что циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.**

**Консервативными** (или **потенциальными**) называются силы, работа которых не зависит от формы пути, а определяется начальным и конечным положениями. Для таких сил работа по замкнутому контуру тождественно равна нулю.

Известно, что для консервативных сил можно ввести понятие потенциальной энергии. Работу по перемещению заряда можно записать как убыль потенциальной энергии заряда в поле:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (1.9)$$

Учитывая, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной, и сравнивая выражения (1.6) и (1.9), находим, что потенциальная энергия точечного заряда  $q$  в поле заряда  $Q$  определяется как

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} + const. \quad (1.10)$$

Постоянная выбирается из условия, что при удалении зарядов на бесконечность их потенциальная энергия взаимодействия обращается в нуль. Тогда

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}. \quad (1.11)$$

#### 1.4 Потенциал электростатического поля. Связь потенциала с напряжённостью электростатического поля

Как видно из уравнения (1.11), потенциальная энергия заряда  $q$  в поле заряда  $Q$  зависит от величины заряда  $q$ . Повторяя те же рассуждения, что и при выводе формулы (1.3) для напряжённости электрического поля, приходим к выводу, что отношение потенциальной энергии заряда в данной точке поля к величине заряда не зависит от величины этого заряда и может служить, таким образом, ещё одной характеристикой поля. Эта характеристика называется потенциалом

$$\varphi = \frac{U}{q}. \quad (1.12)$$

Единица измерения потенциала – Вольт:  $[\varphi] = \frac{Дж}{Кл} = В$ . Поскольку на бесконечности потенциальная энергия взаимодействующих зарядов равна нулю, то и потенциал поля на бесконечности тоже равен нулю. Из выражения (1.12) следует **определение потенциала – это есть потенциальная энергия единичного положительного заряда, помещённого в данную точку поля.** Таким образом, потенциал – это

энергетическая характеристика поля. Из сравнения формул (1.11) и (1.12) следует, что потенциал, создаваемый точечным зарядом в данной точке поля, определяется как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (1.13)$$

Из формул (1.6), (1.9) и (1.12) следует:

$$A_{12} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = U_1 - U_2 = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

или **работа по перемещению точечного заряда между двумя точками в электростатическом поле равна произведению величины заряда на разность потенциалов между начальной и конечной точками:**

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.14)$$

Учитывая, что работа может быть также записана при помощи напряжённости электрического поля

$$A_{12} = \int_1^2 q\vec{E}d\vec{r}, \quad (1.15)$$

то из сравнения формул (1.14) и (1.15) получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r}. \quad (1.16)$$

И напряжённость, и потенциал – это две характеристики одного и того же электростатического поля в данной точке. Следовательно, между ними должно быть некоторое соответствие, связь. Чтобы установить эту связь, рассмотрим работу по перемещению заряда вдоль оси  $x$  на расстояние  $dx$ , при этом разность потенциалов уменьшается на  $d\varphi$ :

$$-qd\varphi = qE_x dx.$$

Из последнего соотношения находим (сокращая на  $q$ )

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (1.17)$$

В формуле (1.17) введен символ частной производной  $\partial$ , чтобы подчеркнуть, что перемещение рассматривается только вдоль оси  $x$ .

Аналогично находим и другие компоненты электрического поля  $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

и  $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ . Из найденных компонент вектора  $\vec{E}$  можно составить весь вектор:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \quad (1.18)$$

Здесь  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы в направлении осей  $x, y, z$ . Выражение (1.18) можно сокращённо переписать, используя оператор “ $\nabla$ ” – читается

“набла”:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ . Поскольку в результате применения этого оператора к скалярной функции получаем вектор градиента этой функции, то

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad \text{или} \quad \vec{E} = -grad\varphi. \quad (1.19)$$

Чтобы сделать наглядным распределение потенциала, пользуются понятием *экипотенциальной поверхности* – это поверхность, все точки которой обладают одинаковым потенциалом. Поскольку потенциал поля точечного заряда зависит только от расстояния до заряда (см. формулу (1.13)), то отсюда следует, что экипотенциальными поверхностями для точечного заряда являются концентрические сферы. С другой стороны, линии напряжённости электрического поля направлены по радиусу от положительного заряда к отрицательному заряду. Таким образом, в случае точечного заряда линии напряжённости перпендикулярны к экипотенциальным поверхностям. Можно, однако,

показать, что этот вывод является общим – *линии напряжённости всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.*

### 1.5 Теорема Гаусса для напряжённости электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах

Принцип суперпозиции (1.5), в принципе, позволяет рассчитать поле любой системы зарядов. Однако для задач, обладающих какой-либо симметрией, вычисление напряжённости значительно упрощается при помощи теоремы Гаусса. Прежде чем сформулируем эту теорему, введём понятие элементарного потока вектора напряжённости через произвольную площадку. *Потоком вектора напряжённости через произвольную элементарную площадку  $dS$  называется скалярное произведение этого вектора на элемент поверхности  $d\vec{S}$ .*

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S}. \quad (1.20)$$

Теорема Гаусса гласит, что *поток вектора напряжённости электростатического поля через любую замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри этой поверхности, делённой на электрическую постоянную:*

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (1.21)$$

Для непрерывного распределения зарядов с некоторой объёмной плотностью  $\rho = \frac{dq}{dV}$ , зависящей от координаты,  $\sum_{i=1}^N q_i \longrightarrow \int_V \rho dV$ , и вместо формулы (1.21) получаем:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.22)$$

Гаусс получил формулу, которая связывает поток вектора через замкнутую поверхность с мощностью источника вектора (дивергенцией

вектора) внутри этой поверхности  $\oint \vec{E}d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{E}dV$ , где дивергенция вектора  $\vec{E}$

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Отсюда с учетом (1.22) следует

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.23)$$

Последняя формула представляет собой теорему Гаусса для электростатического потенциала в вакууме в дифференциальной форме.

## 1.6 Вычисление напряженностей полей с помощью теоремы Гаусса

а) *Поле бесконечно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$* . Из соображений симметрии ясно, что поле будет направлено перпендикулярно плоскости – от плоскости для положительных зарядов, как показано на рис. 1.3, и к плоскости для отрицательных зарядов:

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_n. \quad (1.24)$$

Кроме того, также из соображений симметрии ясно, что поле будет однородным. Представим цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными плоскости и с основанием  $\Delta S$ . Посчитаем теперь поток через цилиндр. Поток через боковую поверхность равен нулю и, таким образом, весь поток через поверхность цилиндра сведётся к потоку через основания

$$\oint_s \vec{E}d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} E_n ds + \int_{\Delta S_2} E_n ds = 2E\Delta S. \quad (1.25)$$

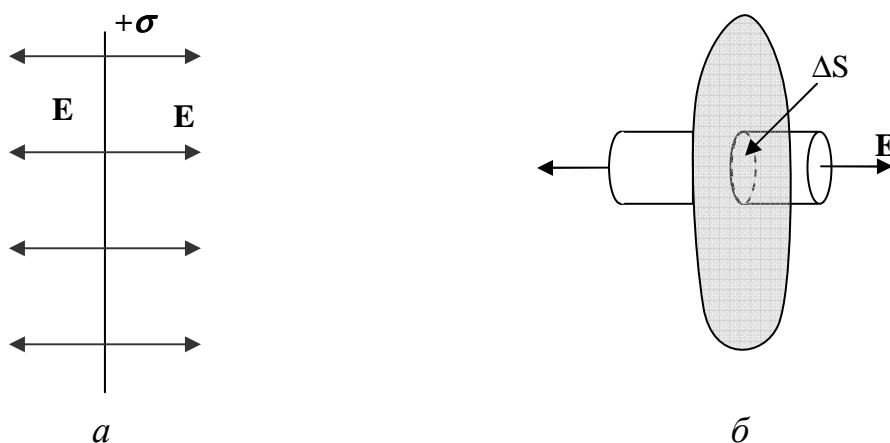


Рисунок 1.3

На основании теоремы Гаусса, этот поток равен заряду, заключённому внутри цилиндра, делённому на  $\epsilon_0$ .

$$2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}. \quad (1.26),$$

Откуда следует, что

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.27)$$

Таким образом, поле однородно заряженной плоскости:

- направлено перпендикулярно плоскости,
- является однородным,
- не зависит от расстояния до плоскости.

б) **Поле 2-х разноименно заряженных плоскостей.** Поле, образованное двумя разноименно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов  $\sigma$ , на основании принципа суперпозиции можно представить как наложение полей, созданных этими плоскостями отдельно. Поскольку эти поля в промежутке между плоскостями направлены одинаковым образом, то величина поля будет просто равна удвоенной величине поля, создаваемого одной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.28)$$

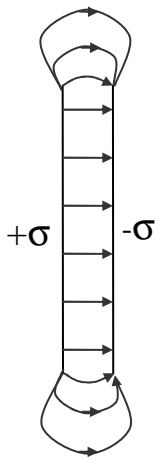


Рисунок 1.4

Вне объёма, ограниченного плоскостями, поля направлены в разные стороны, и результирующее поле равно нулю. Следовательно, поле, созданное двумя параллельными заряженными плоскостями:

- является однородным,
- сосредоточено в промежутке между плоскостями.

Полученные выводы приближённо справедливы для плоских конденсаторов, для которых расстояние между плоскостями (их называют пластинами, или обкладками

конденсатора) много меньше размеров пластин (рис. 1.4).

в) **Поле бесконечного заряженного цилиндра.** Пусть имеем бесконечный цилиндр радиуса  $R$ , заряженный с поверхностной

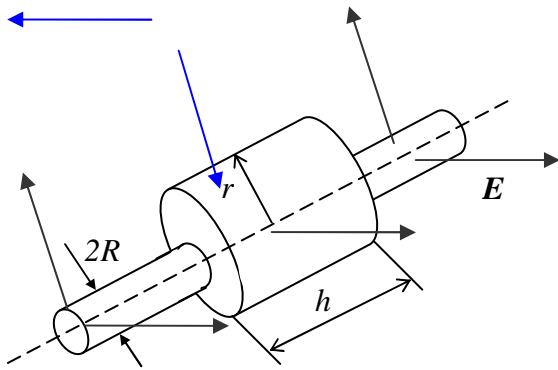


Рисунок 1.5

плотностью заряда  $\sigma$  (рис. 1.5). Из соображений симметрии ясно, что поле будет направлено перпендикулярно к оси цилиндра, и его величина будет зависеть от расстояния до цилиндра. Мысленно окружим наш цилиндр коаксиально расположенным цилиндром радиуса  $r$  и высотой  $h$  и посчитаем поток вектора

напряжённости через поверхность, ограниченную этим цилиндром. Из соображений симметрии ясно, что поток через основания цилиндра будет равен нулю. Поток через боковую поверхность цилиндра будет равен

$$E(r)2\pi rh. \text{ На основании теоремы Гаусса он будет равен } \frac{1}{\epsilon_0} \delta 2\pi R h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}.$$

Здесь  $\lambda$  – линейная плотность заряда.

$$E(r)2\pi rh = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda h. \tag{1.29}$$

Откуда



$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}. \quad (1.30)$$

Выражение (1.30) справедливо для  $r > R$ . Внутри полого цилиндра, на основании теоремы Гаусса, поле равно нулю. Если мы составим цилиндрический конденсатор из двух коаксиальных заряженных цилиндров, то поле будет отличным от нуля только между цилиндрами, и его величина будет определяться выражением (1.30). Вне наружного цилиндра поле, на основании принципа суперпозиции, будет равно 0. Поле цилиндрического конденсатора (конечной длины) будет отличаться от поля цилиндрического конденсатора бесконечной длины только у краёв.

г) **Поле заряженной сферической поверхности.** Пусть есть сфера радиуса  $R$ , с плотностью поверхностного заряда  $\sigma$ . Из соображений симметрии следует, что это поле будет центральным. Окружим нашу сферу другой концентрической сферой радиуса  $r$ . Если  $r > R$ , то на основании теоремы Гаусса

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда

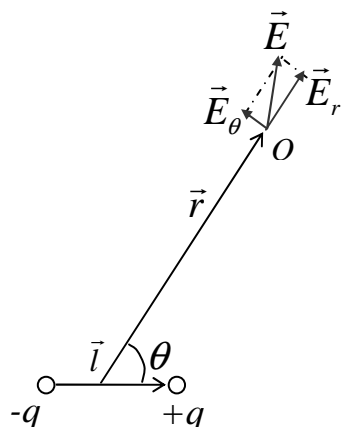
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (1.31)$$

Внутри сферы поле равно нулю. Таким образом, поле равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда, помещённого в центр сферы.

### 1.7 Поле диполя. Дипольный момент

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноимённых зарядов, расстояние между которыми значительно меньше всех остальных расстояний задачи. Диполь характеризуется электрическим моментом  $\vec{p} = q\vec{l}$ , где  $\vec{l}$  – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному, длина которого равна

расстоянию между зарядами диполя. Потенциал диполя на больших расстояниях определяется по формуле



$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (1.32)$$

где  $\theta$  – угол между вектором  $\vec{r}$  и осью диполя (вектором  $\vec{l}$ ) (рис. 1.6). Напряжённость электрического поля вдоль  $\vec{r}$  определяется в соответствии с выражением

Рисунок 1.6

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}. \quad (1.33)$$

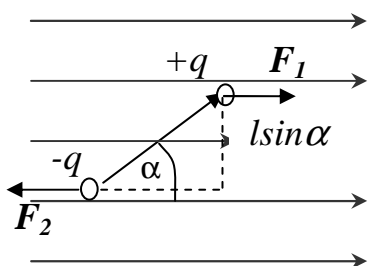
Напряжённость поля в перпендикулярном направлении

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}. \quad (1.34)$$

И полная напряжённость в точке O (см. рис.1.6) определяется как

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}. \quad (1.35)$$

Во внешнем электрическом поле на диполь действует пара сил, момент которой (рис. 1.7) определяется как



$$N = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (1.36)$$

Из **рис. 1.33** также видно, что момент (1.36) может быть записан в векторном виде

Рисунок 1.7

$$\vec{N} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (1.37)$$

Чем же интересен диполь, что мы акцентируем на нём внимание? Оказывается, диполь играет очень важную роль в физике.

Во-первых, поле системы зарядов  $q_i$ , алгебраическая сумма которых равна нулю, на больших расстояниях проявляет себя как поле диполя с моментом

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i . \quad (1.38)$$

Здесь  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор  $i$ -го заряда.

Во-вторых, осциллирующая модель диполя может служить элементарным излучателем электромагнитных волн.

## 1.8 Диэлектрики. Полярные и неполярные молекулы

Диэлектриками называются вещества, электропроводность которых примерно в  $10^{15} \dots 10^{20}$  раз ниже, чем электропроводность металлов. Мы сейчас рассмотрим качественно, что происходит с диэлектриком в электрическом поле.

Суммарный заряд атома равен нулю – число положительных зарядов, сосредоточенных в ядре атома – протонов – в точности равно числу электронов в атомных оболочках. Молекула диэлектрика, состоящая из нейтральных атомов, тоже является электрически нейтральной системой зарядов. Как мы уже знаем, поле такой системы определяется величиной и ориентацией дипольного электрического момента (1.38). С учётом того, что электроны движутся в атомах, на опыте обнаруживается некоторое среднее значение дипольного момента. Для определения этого значения в формуле (1.38) следует заменить мгновенные значения радиус-векторов зарядов их средними значениями:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \langle \vec{r}_i \rangle . \quad (1.39)$$

Такие молекулы, у которых сумма в правой части формулы (1.39) отлична от нуля, и которые обладают дипольным моментом, называются **полярными**. Полярными являются несимметричные молекулы, например молекулы HCl, NH и т.д.

Если сумма в правой части формулы (1.39) равна нулю, то такие молекулы называются **неполярными**, и для них дипольный момент равен нулю. Неполярными являются симметричные молекулы H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> и др. Под действием электрического поля положительные и отрицательные

заряды смещаются в разные стороны. Положительные заряды смещаются в направлении по полю, а отрицательные – в направлении против поля. В результате молекула приобретает дипольный момент, направленный по полю и величина которого зависит от электрического поля

$$\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}. \quad (1.40).$$

$\beta$  называется поляризуемостью молекулы.

На величину дипольного момента полярных молекул электрическое поле практически не влияет. Оно только поворачивает моменты и пытается выстроить их вдоль поля. А температура разбрасывает моменты.

**Поляризованность диэлектрика** называют отношение суммарного момента, заключённого в физически бесконечно малом объёме диэлектрика, к величине этого объёма.

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i. \quad (1.41)$$

Для изотропных диэлектриков

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}. \quad (1.42)$$

Здесь  $\chi$  называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика. Легко показать, что

$$\chi = n\beta, \quad (1.43)$$

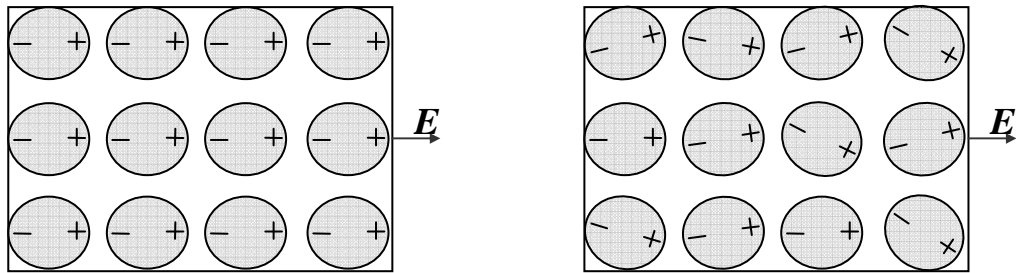
где  $n$  – концентрация молекул.

Заряды, которые входят в состав молекул диэлектрика, называются **связанными**. Они могут только немного смещаться под действием электрического поля. Заряды, которые находятся в диэлектрике и не входят в состав молекул, а также внешние по отношению к диэлектрику заряды, называются **сторонними зарядами**. Результирующее, макроскопическое поле в диэлектрике создаётся как связанными –  $E'$ , так и сторонними зарядами –  $E_0$ :

$$E = E_0 + E'. \quad (1.44).$$

## 1.9 Объемные и поверхностные заряды диэлектрика. Вектор электрического смещения

Если диэлектрик поместить в электрическое поле, то на границах, а в некоторых случаях и в объёме, появляются некомпенсированные связанные заряды. На рис. 1.8 схематически показан неполярный (а) и полярный (б) диэлектрики в электрическом поле.



а

Рисунок 1.8

б

Можно показать, что поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P_n, \quad (1.45)$$

где  $P_n$  – проекция поляризованности на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика (рис. 1.9). Также можно показать, что объёмная плотность связанных зарядов определяется выражением

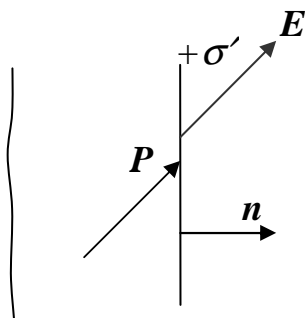


Рисунок 1.9

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (1.46)$$

Другими словами, объёмная плотность связанных зарядов равна взятой с обратным знаком дивергенции поляризованности диэлектрика.

Рис. 1.10 помогает понять смысл выражения (1.46). Точки, в которых дивергенция поляризованности больше нуля, служат источниками вектора поляризованности – из этих точек линии  $\mathbf{P}$  расходятся. Это значит, что в этих точках появляется некомпенсированный отрицательный связанный заряд.

Электрическое поле может создаваться как сторонними, так и связанными зарядами. Это означает, что можно записать

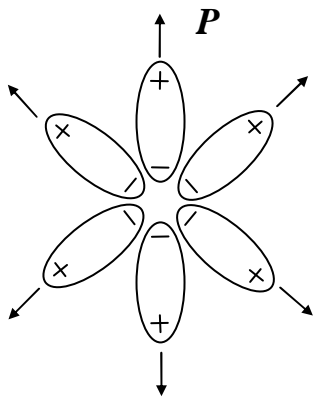


Рисунок 1.10

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho'). \quad (1.47)$$

С учётом выражения (1.46)

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \nabla \vec{P}),$$

откуда следует, что

$$\nabla (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad (1.48)$$

Выражение в скобках (1.48) называют вектором электрического смещения или электрической индукцией  $D$ .

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (1.49)$$

С учётом выражения (1.42), получим

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 (1 + \chi) E = \epsilon_0 \epsilon E, \quad (1.50)$$

где  $\epsilon = 1 + \chi$  – называется (относительной) диэлектрической проницаемостью среды.

Из уравнения (1.50) следует, что вектор  $D$  совпадает по направлению с вектором  $E$ . Это справедливо только для изотропных сред. В общем случае, для анизотропных диэлектриков, векторы  $D$  и  $E$  неколлинеарные.

В соответствии с формулами (1.48) и (1.49) получили, что источниками вектора электрической индукции могут быть только сторонние заряды:

$$\nabla \vec{D} = \rho. \quad (1.51)$$

Проинтегрируем уравнение (1.51) по некоторому объёму  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV .$$

Выражение слева на основании теоремы Остроградского-Гаусса равно потоку вектора электрического смещения через поверхность, ограничивающую объём  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} d\vec{S} ,$$

а интеграл от плотности зарядов по объёму можно заменить суммой заключённых в этом объёме зарядов:

$$\int_V \rho dV \rightarrow \sum q_i .$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, получим теорему Гаусса для электрического смещения: *поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности сторонних зарядов.*

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i . \quad (1.52)$$

Подчеркнём, что вектор  $D$  – вспомогательный вектор, описывающий электрическое поле. Основной характеристикой является напряжённость электрического поля.

### 1.10 Условия на границе раздела двух диэлектриков

Найдем соотношение между значениями напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и электрического смещения  $\vec{D}$  вблизи границы раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Выберем произвольную точку границы раздела  $A$ , построим в этой точке вектор нормали к поверхности  $\vec{n}$  и перпендикулярный ему тангенциальный (направленный по касательной) вектор  $\vec{\tau}$  (рис. 1.11). Построим вокруг точки  $A$  прямоугольный замкнутый контур, две стороны которого параллельны границе раздела и равны  $dl$ , а две другие

перпендикулярны и равны  $h$ . Из условия потенциальности электростатического поля (1.8) следует, что циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по этому замкнутому контуру равна нулю:

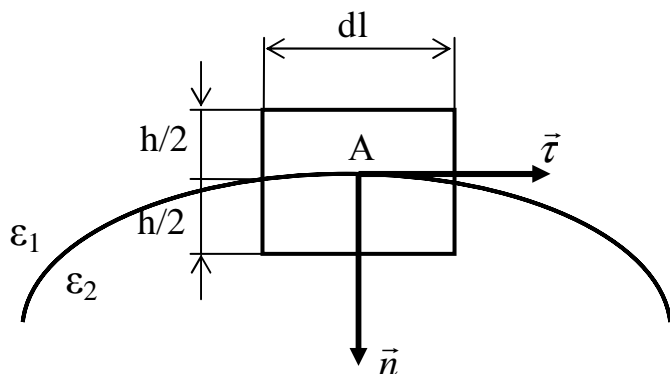


Рисунок 1.11

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Если устремить величину  $h$  к нулю, то к нулю

будут стремиться и значения линейного интеграла  $\int \vec{E} d\vec{l}$  вдоль этих сторон контура, тогда

$$\lim_{(L)} \oint \vec{E} d\vec{l} = (E_{\tau 1} - E_{\tau 2}) dl = 0.$$

Отсюда следует условие:

$$E_{\tau 2} = E_{\tau 1}, \quad (1.53)$$

т.е. касательная к поверхности раздела двух сред составляющая напряженности электрического поля не изменяется при переходе через эту поверхность.

Из формулы (1.50) следует, что

$$D_{\tau 2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{\tau 1}, \quad (1.54)$$

т.е. касательная к поверхности раздела составляющая вектора электрического смещения на этой поверхности претерпевает разрыв.

Теперь построим вокруг точки А цилиндрическую поверхность с параллельными поверхности раздела основаниями площадью  $dS$  и высотой  $h$  (рис. 1.12). Образующие цилиндра перпендикулярны поверхности раздела.



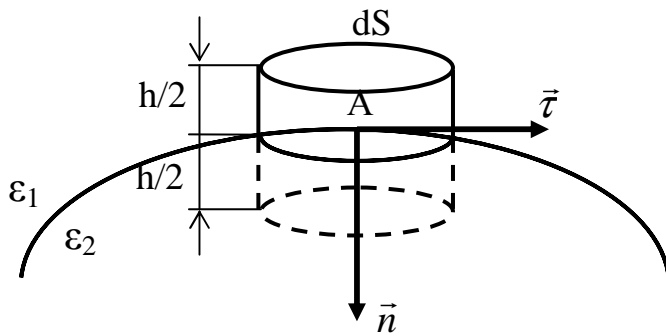


Рисунок 1.12

Из формулы (1.52) при отсутствии на границе раздела сторонних зарядов следует равенство нулю потока вектора электрического смещения через построенную поверхность:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0.$$

Если устремить величину  $h$  к нулю, то к нулю будут стремиться и значения поверхностного интеграла  $\int D_n dS$  по боковой поверхности цилиндра, тогда

$$\lim \oint_S \vec{D} d\vec{S} = (D_{n2} - D_{n1}) dS = 0.$$

Отсюда следует условие:

$$D_{n2} = D_{n1}, \quad (1.55)$$

т.е. перпендикулярная к поверхности раздела двух сред составляющая вектора электрического смещения не изменяется при переходе через эту поверхность.

Из формулы (1.50) следует, что

$$E_{n2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{n1}, \quad (1.56)$$

т.е. перпендикулярная к поверхности раздела составляющая напряженности электрического поля на этой поверхности претерпевает разрыв.

## 1.11 Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектриками называется группа кристаллических диэлектриков, обладающих в определенном интервале температур самопроизвольной (спонтанной) поляризацией, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий – электрического поля, деформации, изменения температуры.

Примерами сегнетоэлектриков могут служить сегнетова соль, титанат бария. Сегнетоэлектрики иногда называют ферроэлектриками, так как их электрические свойства подобны магнитным свойствам ферромагнетиков.

В отсутствие внешнего электрического поля весь объем сегнетоэлектрика самопроизвольно разбит на небольшие области, которые поляризованы до насыщения и называются доменами. Возможные направления электрических моментов доменов определяются симметрией кристалла. Поляризация сегнетоэлектрического образца во внешнем электрическом поле состоит, во-первых, в смещении границ доменов и росте размеров тех доменов, векторы электрических моментов которых близки по направлению к напряженности  $\vec{E}$  поля, и, во-вторых, в повороте электрических моментов доменов по полю. В достаточно сильном поле достигается состояние насыщения, когда весь образец однородно поляризован по полю и его поляризованность  $\vec{P}$  не изменяется при дальнейшем увеличении  $\vec{E}$ . Для сегнетоэлектриков характерно явление диэлектрического гистерезиса (запаздывания), состоящее в различии значений поляризованности сегнетоэлектрического образца при одной и той же напряженности электрического поля в зависимости от значения предварительной поляризованности этого образца (рис. 1.13).

С увеличением напряженности поля поляризованность первоначально неполяризованного образца возрастает от  $P=0$  при  $E=0$  (точка 0) до поляризованности насыщения  $P=P_n$  при  $E=E_n$  (точка 1). Если после этого уменьшить напряженность поля до нуля, поляризованность уменьшится до значения  $P_R$ , которое называется остаточной поляризованностью (точка 2). Поляризация образца исчезает полностью

лишь под действием электрического поля противоположного направления, величина которого  $E_C$  называется коэрцитивной силой (точка 3).

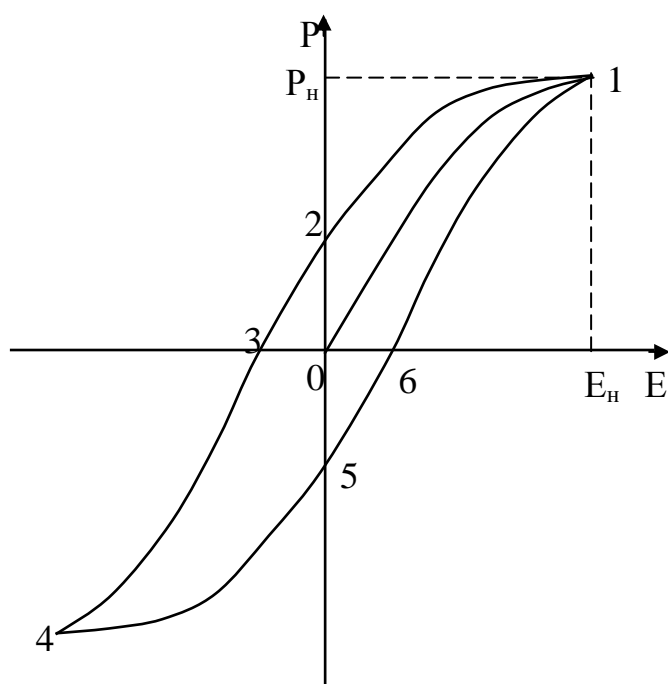


Рисунок 1.13

Дальнейшее увеличение напряженности поля противоположного направления приводит снова к поляризованности до насыщения (точка 4). Уменьшая обратное поле до нуля и увеличивая напряженность поля первоначального направления до значения  $E_n$ , мы через точки 5 и 6 возвращаем образец в состояние 1. Таким образом, полный график зависимости  $P$  от  $E$  образует

замкнутую кривую, которая называется *петлей гистерезиса*.

Диэлектрическая восприимчивость  $\chi$  и относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  сегнетоэлектрика зависят не только от химической природы вещества, но также от температуры, напряженности электрического поля и предварительной поляризации. Максимальные значения  $\chi$  и  $\epsilon$ , соответствующие этой зависимости, достигают у сегнетоэлектриков очень больших значений (порядка  $10^3$  и больше).

У каждого сегнетоэлектрика есть такая температура  $T_C$ , называемая точкой Кюри (температурой Кюри), выше которой это вещество теряет свои особые электрические свойства и ведет себя как обычный полярный диэлектрик. Например, у титаната бария  $T_C=406$  К. Сегнетова соль обладает сегнетоэлектрическими свойствами только в интервале температур между нижней точкой Кюри  $T_C^{нижн} = 255$  К ( $-18^\circ\text{C}$ ) и верхней точкой Кюри  $T_C^{верх} = 297$  К ( $24^\circ\text{C}$ ). В точке Кюри происходит фазовое превращение вещества. Оно переходит из спонтанно поляризованной фазы в неполяризованную, либо наоборот.

## 2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 2.1 Электрический ток проводимости. Сила тока

*Электрическим током* называется упорядоченное движение электрических зарядов. Для возникновения электрического тока в среде необходимо выполнение двух условий: первое – наличие в веществе среды свободных зарядов, способных перемещаться по всему объему тела под действием сколь угодно малой силы, и второе – наличие действующих на свободные заряды сил, которые могут создать упорядоченное движение зарядов. Тела, обладающие свободными зарядами, принято называть проводниками, а частицы, участвующие в переносе заряда – носителями тока. Эти частицы могут быть как микроскопическими – ионы, электроны, так и макроскопическими – пылинки, капельки жидкости.

Электрический ток, соответствующий движению микроскопических заряженных частиц в твердых, жидких и газообразных проводниках, называется *током проводимости*.

Источником силы, способной создать упорядоченное движение зарядов, может быть электрическое поле. При внесении проводника в электрическое поле на носители тока будет действовать сила  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  ( $q$  – заряд носителя тока,  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля), которая приведет к их упорядоченному движению.

Для характеристики электрического тока вводится понятие силы тока. ***Силой тока  $I$  называется скалярная физическая величина, равная количеству заряда, переносимого через поперечное сечение проводника за единицу времени:***

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (2.1)$$

где  $dq$  – заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время  $dt$ . Если сила тока не изменяется с течением времени, то ток называется постоянным. В этом случае через любое поперечное сечение проводника за одинаковые промежутки времени  $t$  протекает одинаковое количество заряда  $q$ . Поэтому сила постоянного тока равна:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (2.2)$$

Сила тока  $I$ , текущего по участку однородного проводника, удовлетворяет, как показывает опыт, закону Ома:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (2.3)$$

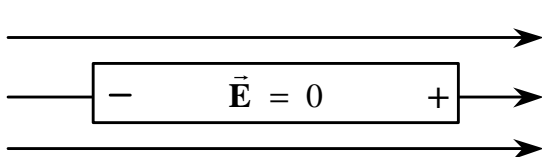
где  $U$  – напряжения на концах участка проводника, а  $R$  – величина, характеризующая данный участок проводника и называемая его сопротивлением. Сопротивление проводника зависит от его геометрических размеров, материала, из которого он изготовлен, и температуры. Для однородного проводника при постоянной температуре сопротивление может быть рассчитано по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.4)$$

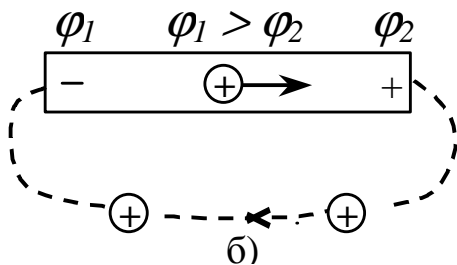
где  $\rho$  – удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник;  $l$  – длина проводника;  $S$  – площадь его поперечного сечения.

## **2.2 Условия существования электрического тока. Источники тока. Электродвижущая сила**

Если в проводнике создать электрическое поле, то перемещение носителей тока очень быстро приведет к тому, что поле внутри проводника исчезнет и ток прекратится (рис. 2.1, *а*). Для поддержания тока в течение длительного времени необходимо, чтобы в проводнике существовало электрическое поле. Этого можно добиться, если постоянно нарушать равновесное распределение зарядов в проводнике: например, переносить заряды из областей с меньшим потенциалом (носители тока предполагаются положительными) в области с более высоким потенциалом (рис. 2.1, *б*). Иными словами, необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути.



а)



б)

Рисунок 2.1

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому пути равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи наряду с движением положительных зарядов под действием сил электростатического поля в сторону убывания потенциала должны быть участки цепи, где перенос положительных зарядов происходил бы в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электростатического

поля. Перемещение носителей тока против сил электростатического поля возможно только под действием сил неэлектростатического происхождения – сторонних сил. Эти силы порождаются химическими процессами, диффузией носителей тока в неоднородной среде, электрическими полями, порождаемыми переменными во времени магнитными полями. Устройства, которые являются источниками сторонних сил, принято называть источниками тока.

Основная характеристика источника тока – электродвижущая сила (ЭДС). *ЭДС источника – это физическая величина, численно равная работе сторонних сил по перемещению положительного единичного заряда по цепи.* Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом  $q$  равна  $A$ , то

$$\varepsilon = \frac{A}{q}. \quad (2.5)$$

ЭДС измеряется в вольтах.

### 2.3 Напряжение на участке цепи. Законы Ома для участка цепи и полной цепи. Правила Кирхгофа

Величина сторонней силы  $\vec{F}_{\text{ст}}$ , действующей на заряд, равна

$$\vec{F}_{\text{ст}} = \vec{E}^* q,$$

где  $\vec{E}^*$  – напряженность поля сторонних сил. Работа сторонних сил над зарядом  $q$  на участке цепи 1-2 равна:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q \int \vec{E}^* d\vec{l}.$$

Разделив эту работу на  $q$ , получим ЭДС, действующую на данном участке:

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}. \quad (2.6)$$

Аналогичный интеграл, вычисленный для замкнутой цепи, даст ЭДС, действующую в этой цепи:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}^* d\vec{l}. \quad (2.7)$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил.

Учитывая то, что на заряд в каждой точке цепи действуют и электростатические и сторонние силы, то суммарная сила равна:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{\text{ст}} = q (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

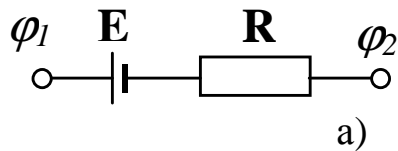
Работа, совершаемая этой силой над зарядом  $q$  на участке 1-2, определяется выражением

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} = q (\varphi_1 - \varphi_2) + q \varepsilon_{12}. \quad (2.8)$$

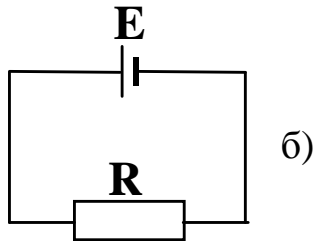
**Физическая величина, численно равная работе, совершаемой при перемещении единичного заряда электростатическими и сторонними силами, называется падением напряжения или просто напряжением на данном участке цепи.** В соответствии с формулой (2.8)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (2.9)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным участком цепи. Если на носители тока действуют и сторонние силы, то такой участок цепи называется неоднородным. Используя выражения (2.3) и (2.9), формулу закона Ома для неоднородного участка цепи (рис. 2.2, а) можно записать в виде



$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{R}. \quad (2.10)$$



Необходимо помнить, что, если ЭДС способствует движению положительных зарядов в выбранном направлении, то  $\varepsilon > 0$ , если препятствует, то  $\varepsilon < 0$ .

Рисунок 2.2

Учитывая связь заряда с силой тока (2.1) и (2.2), определение напряжения (2.9) и закон Ома для участка цепи (2.10), можно формулу для работы, совершаемой силами электрического поля при прохождении электрического тока (2.8), записать в виде

$$A_{12} = IU_{12}t = I^2Rt = \frac{U_{12}^2}{R}t, \quad (2.11)$$

где  $t$  – время прохождения тока. Формула (2.11) в случае, если в участке цепи отсутствуют устройства, преобразующие электрическую энергию в механическую (электродвигатели), определяет выделяющееся в участке цепи количество тепла и соответствует **закону Джоуля–Ленца**.

Допустив в формуле (2.10)  $\varphi_1 = \varphi_2$ , получим выражение закона Ома для замкнутой цепи (рис.2.2, б):

$$I = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (2.12)$$

В формулах (2.10) и (2.12)  $R$  – это полное сопротивление цепи, которое включает в себя внутреннее сопротивление источника тока, сопротивление соединительных проводов и сопротивление потребителей электрической энергии.



Формулы (2.10), (2.12) используются для расчета простых цепей. Расчет сложных цепей упрощается, если пользоваться правилами Кирхгофа. Первое из них относится к узлам цепи. Узел – это точка, в которой сходится более чем два проводника. Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=0}^N I_k = 0 . \quad (2.13)$$

Второе правило относится к любому замкнутому контуру, выделенному в этой цепи. Согласно второму правилу Кирхгофа, алгебраическая сумма падений напряжений на каждом участке выбранного замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, включенных в этот контур:

$$\sum_{k=1}^N I_k \cdot R_k = \sum_{k=1} E_k . \quad (2.14)$$

Решения системы уравнений (4.5)...(4.6) позволят найти все токи в цепи, а также рассчитать напряжения на отдельных участках цепи.

## 2.4 Вектор плотности тока. Закон Ома в дифференциальной форме

Силу тока можно определить не только для всего поперечного сечения проводника, но и для любой, в том числе элементарной (бесконечно малой) площадки  $dS_{\perp}$ , перпендикулярной направлению движения зарядов в точке ее нахождения. Эта сила тока

$$dI = \frac{dq}{dt} , \quad (2.15)$$

где  $dq$  – заряд, проходящий через элементарную площадку за время  $dt$ . Это позволяет ввести заданный в каждой точке проводника вектор плотности тока. Он характеризует распределение тока по поверхности, через которую он протекает. Величина плотности тока определяется формулой

$$j = \frac{d^2q}{dt \cdot dS_{\perp}} = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (2.16)$$

где  $dS_{\perp}$  – площадь элементарной площадки, перпендикулярной к направлению движения зарядов. Таким образом, **вектор плотности тока численно равен заряду, переносимому в единицу времени через единичную (с площадью 1 м<sup>2</sup>) площадку, расположенную перпендикулярно к направлению движения зарядов.** Направлен вектор плотности тока в сторону движения положительных зарядов.

Рассмотрим участок цилиндрического проводника, по которому течет ток (рис. 2.3). Выделим два сечения этого проводника, отстоящих друг от друга на расстоянии  $dl$ . Разность потенциалов между этими сечениями  $d\varphi$ . Сопротивление выделенного элемента проводника  $dR = \rho dl / S$ .

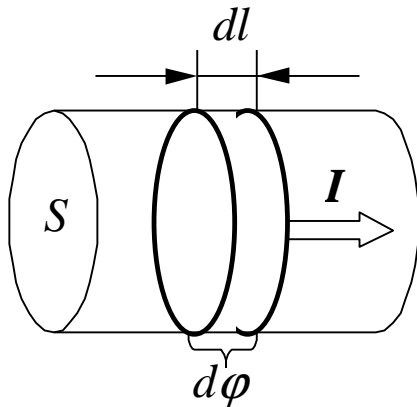


Рисунок 2.3

Применяя к рассматриваемому участку проводника закон Ома, получим:

$$I = \frac{d\varphi}{dR} = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{S dl}. \quad (2.17)$$

Из формулы (2.17) следует выражение для величины плотности тока в проводнике:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{dl}. \quad (2.18)$$

Производная  $d\varphi/dl$  равна напряженности поля  $E$  внутри проводника. Таким образом,

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (2.19)$$

Вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  задает направление движения положительных зарядов и направлен так же, как и вектор плотности тока  $\vec{j}$ , поэтому

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (2.20)$$

где  $\sigma = 1/\rho$  – удельная проводимость проводника. Полученное соотношение называется законом Ома в дифференциальной форме.

## 2.5 Элементы классической электронной теории металлов

Рассмотрим электрический ток в металлах. Согласно классической электронной теории при образовании кристалла металла из отдельных атомов валентные электроны отделяются от атомов. Образующиеся при этом положительные ионы занимают места в узлах кристаллической решетки. Валентные электроны, отделившись от атомов, заполняют все пространство между положительными ионами, компенсируя их кулоновское отталкивание. Положительные ионы в узлах кристаллической решетки совершают только колебательное движение. Электроны совершают тепловое хаотическое движение подобно молекулам идеального газа. Правда, в отличие от молекул газа электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами в узлах кристаллической решетки. Благодаря этим столкновениям устанавливается тепловое равновесие между газом свободных электронов и кристаллической решеткой.

При включении электрического поля в металле начинается направленное движение электронов, то есть появляется электрический ток, плотность которого равна:

$$\vec{j} = n e \vec{u}_{\text{cp}}, \quad (2.21)$$

где  $n$  – концентрация электронов;  $\vec{u}_{\text{cp}}$  – средняя скорость направленного движения электронов. Сила, действующая на электроны со стороны электрического поля, сообщает им ускорение

$$\vec{a} = \frac{e \vec{E}}{m}. \quad (2.22)$$

К концу пробега скорость упорядоченного движения достигает, в среднем, значения

$$\bar{\mathbf{u}}_{\max} = \bar{\mathbf{a}} \tau = \frac{e \vec{\mathbf{E}}}{m} \tau, \quad (2.23)$$

где  $\tau$  – среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами. Это время определяется хаотическим тепловым движением электронов и может быть оценено по формуле

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \quad (2.24)$$

где  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега (по величине она должна быть близка к постоянной кристаллической решетки);  $\langle v \rangle$  – средняя скорость теплового хаотического движения. Поэтому

$$\bar{\mathbf{u}}_{\max} = \frac{e \vec{\mathbf{E}} \lambda}{m \langle v \rangle}. \quad (2.25)$$

Среднее значение скорости упорядоченного движения равно половине максимального:

$$\bar{\mathbf{u}}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\max} = \frac{e \vec{\mathbf{E}} \lambda}{2 m \langle v \rangle}. \quad (2.26)$$

Тогда выражение для плотности тока в металле принимает вид

$$\vec{\mathbf{j}} = \frac{n e^2 \lambda}{2 m \langle v \rangle} \vec{\mathbf{E}}. \quad (2.27)$$

Следовательно, электропроводность металла определяется формулой

$$\sigma = \frac{n e^2 \lambda}{2 m \langle v \rangle}. \quad (2.28)$$

Таким образом, согласно классической электронной теории сопротивление металла обусловлено соударениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки. Столкнувшись с ионом, электрон передает приобретенную от электрического поля дополнительную кинетическую энергию кристаллической решетке. Сообщенная решетке энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, что проявляется в нагревании проводника. Отсюда также можно вывести закон Джоуля–Ленца для участка цепи (2.11)

Следует отметить трудности, с которыми столкнулась классическая электронная теория проводимости металлов. Первая трудность относится к самой успешности теории. В основе ее лежат весьма грубые упрощения реальной картины, не учитывается весьма сильное кулоновское взаимодействие между частицами. Но все попытки учесть взаимодействия приводят только к ухудшению согласия теории с экспериментальными данными.

Вторая трудность связана с зависимостью удельного сопротивления металла от температуры. Из молекулярной физики известно, что средняя скорость теплового движения частиц в теле  $\langle v \rangle$  пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры, откуда должна следовать пропорциональность этой величине удельного сопротивления металла. Но эксперимент показывает, что при высоких и средних температурах удельное сопротивление пропорционально первой степени абсолютной температуры. А при температурах, близких к абсолютному нулю, сопротивление части металлов скачком обращается в точный нуль, это называется явлением *сверхпроводимости металлов*. Классическая электронная теория не может объяснить ни явление сверхпроводимости, ни линейную зависимость удельного сопротивления от температуры.

Третья трудность связана с молярной теплоемкостью металлов. Эксперимент показывает, что для всех металлов значения этой величины близки к  $3R$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная. Такое значение соответствует средней тепловой энергии, приходящейся на один атом  $3kT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана, а эта энергия приходится на три колебательных степени свободы иона в узле кристаллической решетки. Таким образом, теплоемкость металла есть теплоемкость его

кристаллической решетки, а теплоемкость идеального газа электронов на эксперименте не наблюдается. Между тем, для одновалентных металлов она должна увеличить общую теплоемкость в полтора раза, а для двухвалентных – вдвое.

Все перечисленные трудности удалось преодолеть только после перехода при описании электронного газа в металле от классической механики к квантовой.

### 3 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

#### 3.1 Магнитное поле и его характеристики. Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции для магнитного поля

Все мы слышали слова “магнитное поле”, знаем, что постоянные магниты притягивают металлы, знаем, что стрелка компаса ориентируется вдоль магнитного поля Земли. Сейчас мы более детально познакомимся с тем, что мы называем “магнитное поле”. Итак, учение о магнетизме ведёт своё начало с опытов датского физика Х. Эрстеда, который в 1820 г. обнаружил, что проводник с током оказывает ориентирующее воздействие на магнитную стрелку. Схема опыта Эрстеда показана на рис. 3.1. При

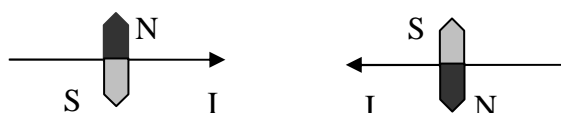


Рисунок 3.1

включении тока через прямолинейный проводник магнитная стрелка устанавливалась перпендикулярно току. При смене направления тока в проводнике изменялось и направление

магнитной стрелки. В том же 1820 г. французский физик Ампер установил, что два параллельных прямых проводника с током, размещённых на некотором расстоянии  $R$  друг от друга, притягиваются, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкиваются, если токи в этих проводниках противоположно направлены. Он же установил и формулу силы, приходящейся на единицу длины каждого проводника. Сейчас выражение для этой силы записывается в виде

$$F_{un} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}. \quad (3.1)$$

Здесь  $I_1$  и  $I_2$  – токи в проводниках,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м – так называемая **магнитная постоянная**. Так было показано, что электрические токи могут создавать магнитное поле, посредством которого осуществляется взаимодействие между током и постоянным магнитом – как в опыте Х.Эрстеда и между токами – как в опыте Ампера. Из опытов Эрстеда и Ампера следовало, что магнитное поле должно иметь направление и, следовательно, величина, характеризующая это поле, должна быть векторной. По историческим причинам, основной силовой характеристикой магнитного поля была названа величина, которая называется «магнитная индукция» и обозначается  **$\mathbf{B}$** . Магнитная индукция измеряется в теслах (Тл). Эта величина названа в честь сербского физика Н. Тесла. Ампер же установил и закон, который определяет силу, действующую на элемент тока  $Idl$  в магнитном поле

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (3.2)$$

Квадратные скобки в формуле (3.2) обозначают векторное произведение. Модуль векторного произведения (3.2) определяется как

$$dF = IdlB \sin \alpha, \quad (3.3)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{B}$ . Здесь же отметим, что направление силы перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы и определяется правилом правого винта для определения направления векторного произведения.

Из выражения (3.3) следует и определение величины Тесла. А именно, если положить  $\alpha = 90^\circ$ , то  $\sin \alpha = 1$ , и тогда из формулы (3.3)

следует, что  $B = \frac{d}{l}$ , или  $1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А } 1 \text{ м}}$ , или **магнитному полю с индукцией**

**в 1 Тл соответствует сила в 1 Н, действующая на кусок прямолинейного проводника в 1 м, по которому течёт ток силой в 1 А при взаимно перпендикулярном расположении проводника и магнитного поля.**

Так как магнитное поле является силовым, то его можно графически изобразить при помощи линий магнитной индукции, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением индукции магнитного поля в этой же точке. Подчеркнём, что основная силовая характеристика магнитного поля – это индукция. В этом смысле индукция магнитного поля аналогична напряжённости электрического поля. Кроме того, имеется и вспомогательная характеристика магнитного поля, которая называется *напряжённостью магнитного поля*, и эта величина аналогична электрическому смещению для электрического поля. Для однородной изотропной среды связь между напряжённостью и индукцией магнитного поля имеет следующий вид:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} . \quad (3.4)$$

Здесь  $\mu$  – так называемая магнитная проницаемость среды, о которой мы будем говорить позднее.

Из опытов Эрстеда и Ампера следовало, что магнитное поле создаётся электрическими токами. Французские физики Био и Савар попытались установить закон, определяющий связь между током и создаваемым этим током магнитным полем. Они проделали много опытов, собрали большой фактический материал, но не смогли установить искомую зависимость из своих результатов. Тогда они обратились за помощью к тогда уже известному другому французскому учёному Лапласу. Лаплас проанализировал результаты опытов Био и Савара и предложил формулу, которая сейчас называется законом Био-Савара-Лапласа, и которая вместе с принципом суперпозиции для магнитного поля позволяет определить магнитное поле, создаваемое любым проводником в произвольной точке:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[Id\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} . \quad (3.5)$$

Здесь  $Idl$  – произведение силы тока на элементарный вектор  $dl$ , совпадающий по направлению с током на данном участке проводника, называется элементом тока,  $r$  – вектор, проведенный от элемента тока  $Idl$  в



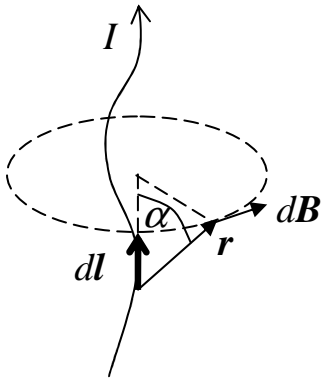


Рисунок 3.2

точку, где вычисляется магнитная индукция. Рис.3.2 поясняет формулу Био-Савара-Лапласа. Из формулы (3.4) и рис.3.2 видно, что направление магнитного поля связано с направлением тока в проводнике правилом правого винта. Таким образом, вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  перпендикулярен плоскости, проходящей через вектор  $d\mathbf{l}$  и точку, в которой вычисляется магнитная индукция. Чтобы получить индукцию, созданную всем

проводником, нужно просуммировать в данной точке магнитные поля, создаваемые каждым элементом тока этого проводника. Если имеется несколько проводников, то необходимо векторно сложить в данной точке магнитные поля, создаваемые каждым проводником в отдельности. Модуль выражения (3.4) определяется как

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (3.6)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$ .

Как уже отмечалось, для магнитного поля, так же как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции**, который утверждает, что **магнитное поле, созданное в некоторой точке несколькими токами, равно векторной сумме полей, создаваемых в этой точке каждым из токов в отдельности:**

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (3.7)$$

Формулу (3.7) можно преобразовать следующим образом

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qnSdl [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qN [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.8)$$

Здесь  $q$  – заряд электрона,  $n$  – концентрация,  $\vec{v}$  – скорость направленного движения электронов в проводнике. Она совпадает по направлению с вектором  $d\mathbf{l}$ , поэтому мы имеем право в векторном произведении

перенести значок вектора с вектора  $d\vec{l}$  на вектор скорости. Мы также воспользовались тем, что сила тока может быть записана как плотность тока, умноженная на площадь поперечного сечения проводника  $I = jS = qn v S$ , а также тем, что произведение поперечного сечения проводника на его бесконечно малую длину  $d\vec{l}$  равно элементу объёма  $dV$ , а произведение концентрации зарядов на объём равно количеству зарядов в этом объёме  $N$ :

$$nSd\vec{l} = ndV = N. \quad (3.9)$$

С учётом сделанных замечаний получим индукцию магнитного поля, создаваемого движущимся со скоростью  $\vec{v}$  зарядом:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.10)$$

Необходимо отметить, что формула (3.10) справедлива при условии  $\frac{v}{c} \ll 1$ , где  $c$  – скорость распространения света в вакууме.

Из выражения (3.5) видно, что величина магнитного поля обратно пропорциональна квадрату расстояния до элемента тока, создающего это поле. Вспомним, что и основная силовая характеристика электрического поля – напряжённость электрического поля – также обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника этого поля – электрического заряда:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (3.11)$$

Такая зависимость не является случайной, а отражает глубокую связь между электрическими и магнитными явлениями. В частности, в курсе теоретической физики доказывалось, что магнитное взаимодействие токов является следствием закона Кулона и инвариантности заряда. Инвариантность заряда означает, что его величина не зависит от скорости движения заряда. Также доказывалось, что электрическое и магнитное поля неразрывно связаны и образуют единое электромагнитное поле. Можно так выбрать систему отсчёта, что магнитное поле будет равно

нулю. Этот вывод также следует и из формулы (3.9). Соответственно, также можно выбрать такую систему отсчёта, в которой электрическое поле будет равно нулю. Во всех остальных системах отсчёта будет наблюдаться единое электромагнитное поле, как совокупность электрического и магнитного полей.

Теперь воспользуемся законом Ампера для расчёта силы взаимодействия, приходящейся на единицу длины двух параллельных токов. В самом деле, пусть у нас есть два параллельных проводника, с расстоянием между ними  $R$ , по которым в одном и том же направлении текут токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис.3.3). Ток  $I_1$  создаёт в месте нахождения второго

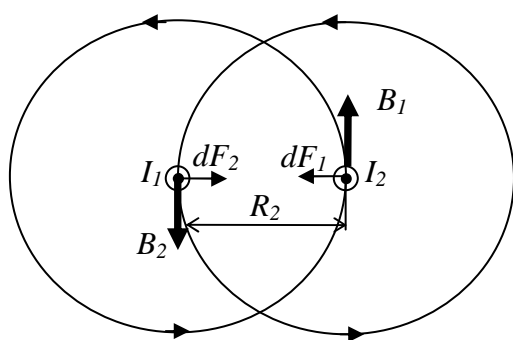


Рисунок 3.3

проводника магнитное поле  $B_1$ , и ток  $I_2$  создаёт в месте нахождения первого проводника магнитное поле  $B_2$ . По закону Ампера, на элемент тока  $I_2 dl$  действует сила  $dF_1 = I_2 B_1 dl$ . Здесь учтено, что  $\sin \alpha = 1$ . На основании формулы (3.14)

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{R}.$$

Окончательно, таким образом, получаем, что

$$dF_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (3.12)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$dF_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (3.13)$$

Направления сил указаны на рис. 3.1/3. Таким образом, получили, что два параллельных проводника, по которым текут токи в одном и том же направлении, притягиваются друг к другу с одинаковыми силами, приходящимися на единицу длины этих проводников и задаваемыми формулой (3.1). Если токи направлены в разные стороны, то, рассуждая аналогичным образом, можно показать, что проводники будут отталкиваться с силой, также определяемой формулой (3.1).

### 3.2 Расчет магнитного поля для бесконечно длинного прямолинейного проводника и в центре кругового тока

В некоторой точке  $O$  все элементы тока создают поле, направленное в одну и ту же сторону. Рис.3.4 соответствует случаю, когда поле

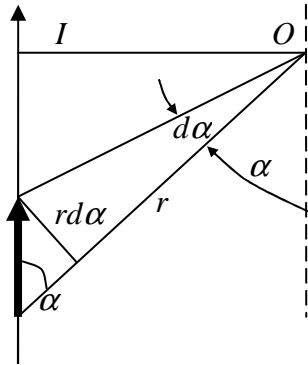


Рисунок 3.4

направлено от нас, за чертёж. Поэтому векторное сложение индукций, создаваемых каждым элементом тока в данной точке, сведётся к сложению их модулей, величина каждого из которых определяется выражением (1.1.5). Для того чтобы получить индукцию  $B$ , создаваемую в точке  $O$  всеми элементами тока, нужно просто сложить индукции, создаваемые каждым элементом тока, что означает взятие интеграла

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (3.13)$$

Величина интеграла (3.13) зависит от расстояния до точки наблюдения  $r$  и угла  $\alpha$ . Интеграл (3.13) можно упростить, выразив все изменяющиеся величины через одну, по которой затем произвести интегрирование. Для нашего интеграла удобно в качестве таковой использовать угол  $\alpha$ . Из рис.3.13 видно, что

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Полученные выражения подставим в интеграл (3.13) и проинтегрируем по углу с учётом того, что он изменяется от нуля (для бесконечности внизу, рис.3.4) до  $\pi$  (для бесконечности вверху, рис.3.4). В результате получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot \int_0^\pi \sin \alpha da = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (3.14)$$

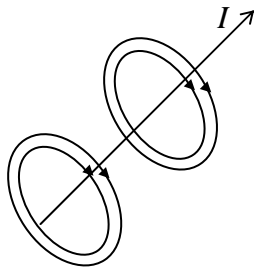


Рисунок 3.5

Линии индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейным бесконечным током, представляют собой семейство концентрических окружностей, как это показано на рис.3.5. Таким образом, линии индукции магнитного поля не имеют ни начала, ни конца. Другими словами, нет в природе магнитных зарядов. Источниками магнитного поля всегда являются *движущиеся*

заряды.

Теперь получим выражение для индукции магнитного поля в центре кругового тока радиуса  $R$ . Из рис.3.6 видно, что все элементы тока создают

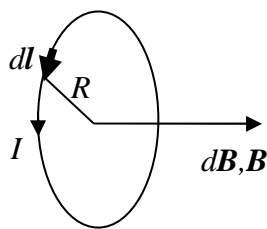


Рисунок 3.6

в центре кругового тока одинаково направленные индукции магнитного поля. Таким образом, векторная сумма может быть сведена к сложению модулей. Также видно, что угол  $\alpha=90^\circ$ . С учётом сделанных замечаний и используя формулу (3.5), получим

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}$$

Таким образом, магнитная индукция в центре кругового тока определяется выражением

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}. \quad (3.15)$$

### 3.3 Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока.

#### Расчет полей бесконечно длинного соленоида и тороида

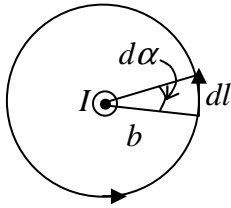
Для электростатического поля мы вводили понятие циркуляции вектора напряжённости электростатического поля как

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl. \quad (3.16)$$

Аналогично вводится циркуляция для магнитного поля:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl. \quad (3.17)$$

Здесь  $B_l = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\mathbf{B}$  на направление касательной к контуру,  $\alpha$  – угол между касательной к контуру и вектором  $\mathbf{B}$ . Посчитаем теперь циркуляцию для прямолинейного проводника с током. В качестве контура обхода выберем окружность некоторого радиуса  $b$ , в центре которой находится проводник с током. В этом случае индукция определяется выражением (3.14). Теперь, с учётом выражения (3.14), посчитаем циркуляцию (3.17). Как видно из рис. 3.7,



$dl = b d\alpha$ . Тогда

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \int_0^{2\pi} b d\alpha = \mu_0 I \quad (3.18)$$

Рисунок 3.7

При вычислении интеграла мы также учли, что  $\cos \alpha = 1$ . Мы получили этот результат, специальным образом выбрав контур обхода. Оказывается, этот результат остаётся справедливым для любого контура обхода. Знак уравнения (3.18) зависит только от направления обхода – если направление обхода и направление тока соответствуют правилу правого винта, то знак уравнения (3.18) будет положительным. В противном случае знак будет отрицательным. Если же контур обхода охватывает несколько токов, то, в силу принципа суперпозиции для магнитного поля, можно записать, что

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint \left( \sum_m \vec{B}_m \right) d\vec{l} = \sum_m \oint \vec{B}_m d\vec{l}. \quad (3.19)$$

Каждый из интегралов в последней сумме равен  $\mu_0 I_m$ . Таким образом, окончательно получим

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_m I_m. \quad (3.20)$$

Полученное выражение называется *законом полного тока для магнитного поля в вакууме* и читается так: **циркуляция вектора магнитной индукции в вакууме по произвольному замкнутому контуру**

*равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную.*

Напомним, что для электростатического поля циркуляция вектора напряжённости равна нулю и это позволило ввести понятие потенциала для электростатического поля. Для магнитного поля циркуляция отлична от нуля и это означает, что для магнитного поля нельзя ввести понятие потенциала.

Если токи текут по всему пространству, охватываемому контуром, то  $\sum_m I_m \rightarrow \int_S \vec{j} d\vec{S}$ , и тогда вместо уравнения (3.20) получим

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (3.21)$$

Преобразуем левую часть уравнения (3.21) по теореме Стокса:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (3.22)$$

Последнее равенство в выражении (3.22) справедливо, если подинтегральные выражения одинаковы в каждой точке поверхности  $S$ :

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{j}. \quad (3.23)$$

Поля, у которых ротор отличен от нуля, называются вихревыми или соленоидальными. Таким образом, магнитное поле является вихревым.

Применим закон полного тока для расчёта магнитного поля бесконечно длинного соленоида (соленоидом называют катушку с намотанным на ней проводом, по которому пропускают электрический ток). Соленоиды используют для получения магнитного поля. В реальности, модель бесконечно длинного соленоида можно использовать для реальных соленоидов, если длина соленоида много больше его диаметра. Эксперимент показывает, что магнитное поле, в основном, сосредоточено внутри соленоида. Выберем некий контур обхода  $ABCD$  (рис.3.8) и посчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции для этого контура.

Пусть на длине  $AD=BC$  укладывается  $N$  витков. Тогда

$$\int_{ABCD} B_l dl = \int_{AB} B_l dl + \int_{BC} B_l dl + \int_{CD} B_l dl + \int_{DA} B_l dl = \mu_0 NI . \quad (3.24)$$

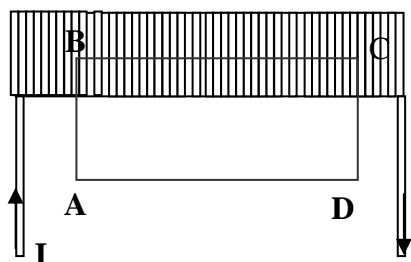


Рисунок 3.8

Интегралы на участках  $AB$  и  $CD$  равны нулю, поскольку на этих участках  $B_l=0$  (угол между векторами  $B$  и  $dl$  равен  $90^\circ$ ). На участке  $DA$  магнитное поле равно нулю (для конечного соленоида поле вне его, конечно же, будет, но очень слабым, поэтому им можно пренебречь). Таким образом, вместо выражения (3.24) получим

$$\int_{ABCD} B_l dl = \int_{BC} B_l dl = \mu_0 NI . \quad (3.25)$$

Теперь вспомним, что поле внутри соленоида постоянное и его можно вынести за знак интеграла. Оставшийся интеграл даст длину участка  $BC=l$ . Следовательно, для поля внутри соленоида окончательно получим

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI . \quad (3.26)$$

Здесь  $n = N/l$  – число витков, приходящееся на единицу длины. Важное место в технике занимает также тороид – кольцевая катушка с навитым на ней проводом. Как показывает опыт, поле полностью сосредоточено внутри катушки, поэтому выберем контур обхода, проходящий внутри катушки. Очевидно, что это будет окружность радиуса  $r$ . Если в катушке  $N$  витков, то для поля внутри тороида получим

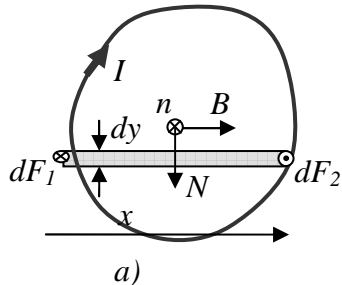
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \mu_0 nI . \quad (3.27)$$

Из выражений (3.26) и (3.27) видно, что формулы для тороида и бесконечно длинного соленоида одинаковы. И это неудивительно, если вспомнить, что бесконечно длинный соленоид можно представить как тороид с бесконечно большими радиусами.



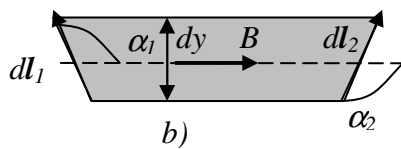
### 3.4 Контур с током в магнитном поле

Пусть у нас имеется плоский контур с постоянным током  $I$  в однородном магнитном поле  $B$ , причём поле направлено, как показано на рис.3.9. В соответствии с законом Ампера на элемент тока действует сила



$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (3.28)$$

Чтобы получить полную силу, действующую на контур, необходимо проинтегрировать уравнение (3.28). При этом учтём, что магнитное поле и сила тока – величины постоянные.



$$\vec{F} = \oint I[d\vec{l}, \vec{B}] = I[(\oint d\vec{l}), \vec{B}] = 0,$$

Рисунок 3.9

поскольку  $\oint d\vec{l} = 0$ . Таким образом,

получили, что результирующая сила, действующая на контур в постоянном магнитном поле, равна нулю. Продолжим наш анализ дальше.

На выделенный элемент тока слева действует сила  $dF_1$ , направленная от нас, а на выделенный элемент тока справа действует сила  $dF_2$ , направленная на нас. Модули этих сил равны по величине. В самом деле,

$$dF_1 = IBdl_1 \sin \alpha_1 = IBdy,$$

$$dF_2 = IBdl_2 \sin \alpha_2 = IBdy.$$

Мы получили, что на противоположные участки контура действуют две противоположно направленные и одинаковые по величине силы, которые создают вращательный момент:

$$dN = IBxdy = IBdS. \quad (3.29)$$

Здесь  $dS = xdy$  – площадь заштрихованной полоски. Из рис.3.9 видно, что векторы  $\mathbf{n}$  (единичный вектор нормали к поверхности контура –  $d\mathbf{s} = \mathbf{n}dS$ ),  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{N}$  образуют правовинтовую систему, следовательно, можно записать, что

$$d\mathbf{N} = I[\mathbf{n}, \mathbf{B}]dS \quad (3.30)$$

и

$$\mathbf{N} = \int I[\mathbf{n}, \mathbf{B}]dS = I[\mathbf{n}, \mathbf{B}] \int dS = I[\mathbf{n}, \mathbf{B}]S = [I S \mathbf{n}, \mathbf{B}] = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]. \quad (3.31)$$

Здесь  $\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}$  – так называемый магнитный момент контура с током. Таким образом, получили, что на контур с током в магнитном поле действует вращательный момент

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]. \quad (3.32)$$

Модуль выражения (3.28) равен

$$N = p_m B \sin \alpha \quad (3.33)$$

Можно показать, что если направления магнитного момента и магнитного поля совпадают, то магнитные силы стремятся растянуть контур, а если магнитный момент и магнитное поле имеют противоположные направления, то магнитные силы стремятся сжать контур.

Для того чтобы увеличить угол между магнитным моментом и внешним магнитным полем на  $d\alpha$ , необходимо внешними силами совершить работу против магнитных сил, создающих вращательный момент (3.33):

$$dA = p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha \quad (3.34)$$

Эта работа пойдёт на увеличение механической составляющей потенциальной энергии контура с током в магнитном поле:

$$dW_{\text{мех}} = p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (3.35)$$

Интегрируя и полагая константу интегрирования равной нулю (тем самым мы просто смещаем начало отсчёта потенциальной энергии), получим

$$W_{\text{мех}} = - p_m B \cos \alpha = - \mathbf{p}_m \mathbf{B}. \quad (3.36)$$

Из выражения (3.36) следует, что если направления магнитного момента и магнитного поля совпадают, то потенциальная энергия будет иметь минимум и это будет положение устойчивого равновесия. Если же

направления магнитного поля и магнитного момента антипараллельны, то это будет соответствовать максимуму потенциальной энергии и, следовательно, это будет положение неустойчивого равновесия.

### 3.5 Теорема Гаусса для магнитного поля. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Потоком вектора магнитной индукции через площадку  $dS$  называется скалярное произведение

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_n \cdot dS. \quad (3.37)$$

Здесь  $B_n = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\mathbf{B}$  на направление нормали к площадке  $dS$ . Если по контуру течёт ток, то положительное направление вектора нормали к поверхности связывают правилом правого винта с направлением тока в контуре. Таким образом, магнитный поток, создаваемый самим током контура, всегда положителен. Исходя из уравнения (3.37), полный поток через контур

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B_n \cdot dS. \quad (3.38)$$

Если поле однородно по *плоской* поверхности, то

$$\Phi = B \cdot S. \quad (3.39)$$

Из последнего соотношения следует определение единицы измерения магнитного потока, которая называется *вебер* (Вб): 1 Вб – это магнитный поток через  $1 \text{ м}^2$  плоской поверхности индукции магнитного поля в 1 Т при параллельном направлении индукции и вектора нормали к поверхности.

Для магнитного потока справедлива *теорема Гаусса: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю*

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B_n \cdot dS = 0. \quad (3.40)$$

Аналогичная теорема для вектора напряжённости электрического поля звучит так: *поток вектора напряжённости электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри этой поверхности, делённой на электрическую постоянную*

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \Sigma q_i / \epsilon_0. \quad (3.41)$$

Таким образом, теорема Гаусса для магнитного поля отражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов, и что линии индукции магнитного поля суть замкнутые линии. В качестве примера рассмотрим, чему равен магнитный поток, создаваемый соленоидом, через соленоид. Поскольку внутри соленоида магнитное поле однородно по сечению соленоида и совпадает с направлением нормали к одному витку, то магнитный поток через один виток будет равен (см. формулу (3.11) для магнитного поля соленоида)

$$\Phi_1 = BS = \frac{\mu_0 NI}{l} S. \quad (3.42)$$

Магнитный поток через весь соленоид будет очевидно равен магнитному потоку через 1 виток, умноженному на число витков, и эта величина называется потокосцеплением

$$\Psi = \Phi_1 N = BSN = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} S. \quad (3.43)$$

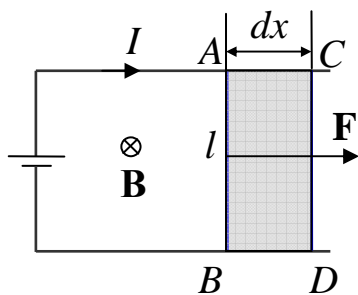


Рисунок 3.10

Если проводник длиной \$l\$ с током \$I\$ не закреплён (участок AB на рис.3.10), то под действием силы Ампера он будет перемещаться в магнитном поле \$\mathbf{B}\$ в направлении \$x\$. По определению, элементарная работа будет равна

$$dA = F dx = IB l dx = IB dS = Id\Phi, \quad (3.44)$$

где \$d\Phi\$ – магнитный поток через поверхность \$dS\$, очерчиваемую проводником при его движении. Таким образом, получили, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению

силы тока в проводнике на магнитный поток через поверхность, которую пересекает проводник при своём движении. Можно показать, что полученная формула справедлива и при произвольном направлении вектора  $\mathbf{B}$ :

$$dA = Id\Phi. \quad (3.45)$$

Выражение для работы по перемещению замкнутого контура оказывается подобным выражению (3.45) и для произвольного конечного перемещения контура в магнитном поле имеет вид

$$A = I\Delta\Phi, \quad (3.46)$$

т.е. равно произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

### 3.6 Сила Лоренца. Эффект Холла

Как известно, на проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера (1.2). Перепишем выражение для силы Ампера в несколько ином виде:

$$d\mathbf{F} = I [\mathbf{dl}, \mathbf{B}] = jS[\mathbf{dl}, \mathbf{B}] = qn v S[\mathbf{dl}, \mathbf{B}] = qnsdl[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = qndV[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = qN[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (3.47)$$

Здесь мы учли, что  $I = jS$ ;  $j = qn v$  – есть плотность тока,  $Sdl = dV$  – элемент объёма проводника,  $ndV = N$  – число электронов в этом элементе объёма. Также учли, что направления векторов  $\mathbf{v}$  и  $d\mathbf{l}$  совпадают между собой, и поэтому мы имеем право в векторном произведении перенести значок вектора с элемента  $I d\mathbf{l}$  на скорость  $\mathbf{v}$ . Если теперь разделим обе части уравнения (3.47) на число электронов, то получим силу, действующую на движущийся электрон в магнитном поле. Эта сила называется силой Лоренца, и она равна

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (3.48)$$

Подчеркнём, что тот путь, которым мы получили выражение для силы Лоренца, нельзя рассматривать как вывод этой формулы. Выражение

для силы Лоренца найдено экспериментально. Просто мы показали, как из одного экспериментального выражения (для силы Ампера) можно получить другое и наоборот. Но и сила Ампера и сила Лоренца представляют собой, прежде всего, экспериментально установленные законы природы. Модуль (3.48), естественно, определяется выражением

$$F = qvB\sin\alpha. \quad (3.49)$$

Здесь  $\alpha$  – угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ .

Так как сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости частицы, то она работу не совершает. Она только изменяет направление скорости (оставаясь всегда перпендикулярной направлению скорости), оставляя неизменной величину скорости. Мы знаем, что движение под действием силы, всё время перпендикулярной направлению скорости и оставляющей неизменной её величину, есть движение по окружности.

Если помимо магнитного поля, имеется и электрическое, то полная сила, действующая на движущийся заряд, будет определяться как

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}] + q\mathbf{E}. \quad (3.50)$$

Полученное выражение называют *формулой Лоренца*.

Можно показать, что сила магнитного взаимодействия двух движущихся со скоростью  $v$  ( $v \ll c$ ) относительно магнитного поля зарядов относится к силе электрического взаимодействия между ними, как

$$\frac{F_m}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}. \quad (3.51)$$

Другими словами, из формулы (3.51) следует, что магнетизм исчез бы, если бы скорость света была равна бесконечности. Таким образом, магнетизм является релятивистским эффектом.

*Эффектом Холла называют возникновение в проводнике, помещённом в перпендикулярное к направлению тока магнитное поле, поперечной к направлению тока разности потенциалов.*

Пусть у нас есть проводник прямоугольного поперечного сечения (рис 3.11), по которому течёт ток плотностью  $j$ . Перпендикулярно направлению тока приложено магнитное поле  $B$ . На электроны, скорость

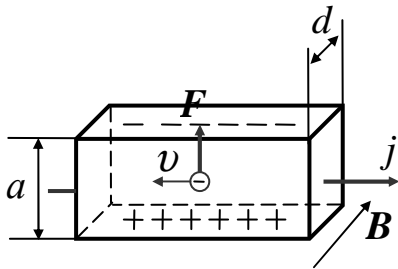


Рисунок 3.11

которых противоположна направлению тока, будет действовать сила Лоренца. Под действием этой силы электроны будут отклоняться к верхней грани, которая, таким образом, будет заряжаться отрицательно. На нижней грани будут оставаться нескомпенсированные положительные заряды. В результате возникнет поперечное поле. В

стационарном состоянии величина этого поля будет равна силе Лоренца

$eE = e \frac{\Delta\varphi}{a} = evB$ , или  $\Delta\varphi = avB$ . Здесь  $\Delta\varphi$  – поперечная (холловская)

разность потенциалов. Так как сила тока  $I = jS = evnS$  ( $n$ , как обычно,

концентрация электронов), то  $v = \frac{I}{enS}$ . Подставим полученное выражение

для скорости в формулу для холловской разности потенциалов. При этом учтём, что  $S=ad$ . Окончательно получим, что

$$\Delta\varphi = \frac{I}{enS} aB = \frac{I}{enad} aB = \frac{I}{end} B = R \frac{IB}{d}$$

или

$$\Delta\varphi = R \frac{IB}{d}. \quad (3.52)$$

Здесь  $R = \frac{1}{en}$  – так называемая постоянная Холла. Таким образом, измеряя

макрохарактеристики, такие как холловская разность потенциалов, сила тока в проводнике, индукция магнитного поля, а также поперечный размер проводника  $d$ , можно определить концентрацию зарядов и их знак – для положительных зарядов (дырок в полупроводниках), холловское поле будет иметь противоположный знак.

### 3.7 Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея

После того, как было установлено, что магнитное поле создаётся электрическими токами, учёные пытались решить обратную задачу – при помощи магнитного поля создать электрический ток. Эту задачу в 1831 г. успешно решил М.Фарадей, который открыл явление электромагнитной индукции. Суть этого явления заключается в том, что **в замкнутом проводящем контуре при любом изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур, возникает электрический ток, который называется индукционным**. Схема некоторых опытов Фарадея показана на рис. 3.12.

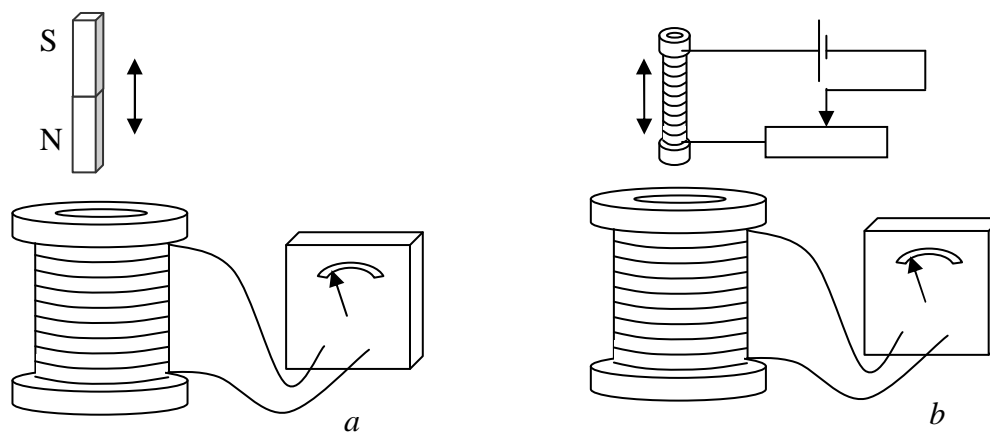


Рисунок 3.12

При изменении положения постоянного магнита относительно катушки, замкнутой на гальванометр, в последней возникал электрический ток, причём направление тока оказывалось различным – в зависимости от направления перемещения постоянного магнита. Аналогичный результат достигался и при перемещении другой катушки, по которой шёл электрический ток. Более того, в большой катушке возникал ток даже при неизменном положении меньшей катушки, но при изменении тока в ней. На основании подобных опытов М.Фарадей пришёл к выводу, что в катушке всегда возникает электрический ток при изменении магнитного потока, сцепленного с этой катушкой. Величина тока зависит от скорости изменения магнитного потока. Сейчас мы формулируем открытия Фарадея в виде **закона электромагнитной индукции: при любом изменении магнитного потока, сцепленного с проводящим замкнутым контуром, в этом контуре возникает ЭДС индукции, которая определяется как**



$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.53)$$

Знак “–” в выражении (3.53) означает, что при увеличении магнитного потока магнитное поле, созданное индукционным током, направлено против внешнего магнитного поля. Если же магнитный поток уменьшается по величине, то магнитное поле индукционного тока совпадает по направлению с внешним магнитным полем. Русский учёный Х.Ленц таким образом определил появление знака минус в выражении (3.53) – **индукционный ток в контуре всегда имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле имеет такое направление, что препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего возникновение индукционного тока.**

Дадим ещё одну формулировку закона электромагнитной индукции: **ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре равна взятой с противоположным знаком скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур.**

Немецкий физик Гельмгольц показал, что закон электромагнитной индукции можно получить из закона сохранения энергии. В самом деле, энергия источника ЭДС по перемещению проводника с током в магнитном поле (см.рис.3.37) будет затрачена как на Джоулев разогрев проводника сопротивлением  $R$ , так и на работу по перемещению проводника:

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + I d\Phi. \quad (3.54)$$

Тогда из уравнения (3.54) сразу же следует, что

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (3.55)$$

В числителе выражения (3.55) стоит алгебраическая сумма ЭДС, действующих в контуре. Следовательно,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Какова же физическая причина возникновения ЭДС? На заряды в проводнике АВ действует сила Лоренца при движении проводника вдоль оси х. Под действием этой силы положительные заряды будут смещаться вверх, в результате чего электрическое поле в проводнике будет ослаблено. Другими словами, в проводнике появится ЭДС индукции. Следовательно, в рассмотренном нами случае физической причиной возникновения ЭДС является сила Лоренца. Однако, как мы уже отмечали, и в неподвижном замкнутом контуре может появиться ЭДС индукции, если будет изменяться магнитное поле, пронизывающее этот контур. В этом случае заряды можно считать неподвижными, а на неподвижные заряды сила Лоренца не действует. Чтобы объяснить возникновение ЭДС в этом случае, Максвелл предположил, что всякое изменяющееся магнитное поле порождает в проводнике изменяющееся электрическое поле, которое и является причиной возникновения ЭДС индукции. Циркуляция вектора напряжённости, действующей в этом контуре, таким образом, будет равна ЭДС индукции, действующей в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} . \quad (3.56)$$

Явление электромагнитной индукции используется для превращения механической энергии вращения в электрическую – в генераторах электрического тока. Обратный процесс – превращение электрической энергии в механическую, основанный на вращательном моменте, действующем на рамку с током в магнитном поле, используется в электродвигателях.

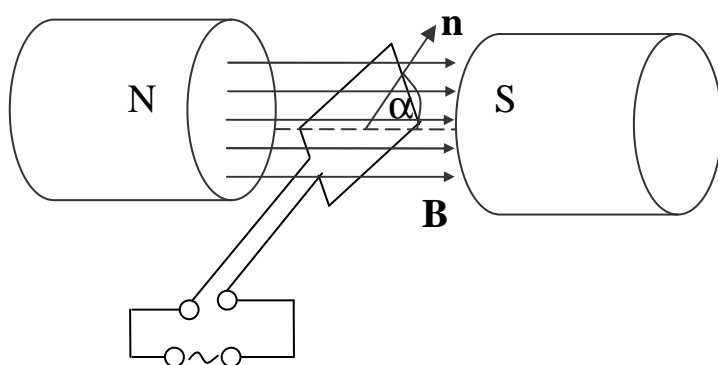


Рисунок 3.13

Рассмотрим принцип действия генератора электрического тока (рис. 3.13). Пусть у нас проводящая рамка вращается между полюсами магнита (это может быть и

электромагнит) с частотой  $\omega$ . Тогда угол между нормалью к плоскости рамки и направлением магнитного поля изменяется по закону  $\alpha = \omega t$ . В этом случае магнитный поток, сцепленный с рамкой, будет изменяться в соответствии с формулой

$$\Phi = BS \cos \omega t, \quad (3.57)$$

где  $S$  – площадь контура. В соответствии с законом электромагнитной индукции в рамке будет индуцироваться ЭДС

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \varepsilon_{\max} \sin \omega t, \quad (3.58)$$

с  $\varepsilon_{\max} = BS\omega$ . Таким образом, если в магнитном поле вращается с постоянной угловой скоростью проводящая рамка, то в ней будет индуцироваться ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону. В реальных генераторах вращают много витков, соединенных последовательно, а в электромагнитах, для увеличения магнитной индукции, используют сердечники с большой магнитной проницаемостью  $\mu$ .

Индукционные токи могут возникать и в толще проводящих тел, помещённых в переменное магнитное поле. В этом случае эти токи называются токами Фуко. Эти токи вызывают разогрев массивных проводников. Это явление используется в вакуумных индукционных печах, где сильные токи разогревают металл до плавления. Поскольку разогрев металлов происходит в вакууме, то это позволяет получать особо чистые материалы.

### 3.8 Самоиндукция. Экстратоки размыкания и замыкания цепи

Текущий в замкнутом контуре электрический ток создаёт вокруг себя магнитное поле, величина которого, на основании закона Био-Савара-Лапласа, пропорциональна току в контуре  $I$ . Поэтому магнитный поток через поверхность этого же контура (сцепленный с контуром) может быть записан как

$$\Phi = LI, \quad (3.59)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется индуктивностью контура. Если ток, а, следовательно, и магнитный поток (3.59) будут изменяться во времени, то согласно закону электромагнитной индукции в контуре возникнет дополнительная к существующей ЭДС самоиндукции.

**Явление возникновения в замкнутом контуре ЭДС при изменении силы тока в этом же контуре, называется явлением самоиндукции.** Единица измерения индуктивности называется *генри*. Из уравнения (3.59) следует определение  $1 \text{ Гн}$  – это есть индуктивность контура, в котором магнитный поток самоиндукции равен  $1 \text{ Вб}$  при протекании в контуре тока в  $1 \text{ А}$ . Посмотрим, чему равна индуктивность бесконечно длинного соленоида. На основании выражения (5.7) магнитный поток, сцепленный с контуром, равен

$$\Psi = \Phi_1 N = BSN = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} S. \quad (3.60)$$

Из сравнения формул (3.59) и (3.60) видно, что

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (3.61)$$

Если сердечник контура представляет собой материал с магнитной проницаемостью  $\mu$ , то тогда вместо формулы (3.61) следует писать

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}. \quad (3.62)$$

Из выражения (3.62) видно, что индуктивность контура определяется его геометрическими размерами, числом витков и магнитной проницаемостью сердечника.

На основании выражения (3.59) можно найти, чему равна ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left( L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right). \quad (3.63)$$

Так как контуры делаются, как правило, жёсткими, то  $\frac{dL}{dt} = 0$ , и тогда для ЭДС самоиндукции получаем

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.64)$$

Если ток в контуре возрастает  $\frac{dI}{dt} > 0$ , то  $\varepsilon_s < 0$ , и ток самоиндукции направлен против “основного тока”. Если же основной ток убывает  $\frac{dI}{dt} < 0$ , то  $\varepsilon_s > 0$ , и ток самоиндукции совпадает с направлением основного тока. И в том и в другом случае индукционный ток замедляет изменение основного тока. Другими словами, катушка индуктивности обладает электрической инерционностью, которая обусловлена законом Ленца, и любые изменения тока тормозятся тем больше, чем больше индуктивность контура.

Наличие в электрической цепи индуктивности приводит к замедлению любого изменения тока в этой цепи. Более того, как мы ниже покажем, в момент размыкания и замыкания цепи в ней могут возникать большие дополнительные ЭДС самоиндукции и обусловленные этими ЭДС электрические токи, которые называются экстратоками размыкания и замыкания.

Пусть у нас есть контур, состоящий из ЭДС  $\varepsilon$  (внутренним сопротивлением пренебрегаем), сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  –

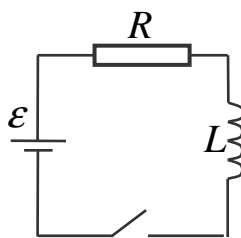


Рисунок 3.14

рис. 3.14. В цепи течёт ток  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R_0}$ . В момент размыкания цепи, когда ток в цепи резко уменьшается, в индуктивности возникает ЭДС самоиндукции. На основании закона Ома можно записать:

$$IR = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.65)$$

В последнем уравнении разделим переменные и разделим обе части на  $L$ , после чего получим  $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$ . Проинтегрируем левую часть от  $I_0$  до  $I$ , а правую – от нуля до  $t$ :  $\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t$  или

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.66)$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  называется временем релаксации. Таким образом, при выключении ток уменьшается до нуля не мгновенно, а в соответствии с законом (3.66). График этого процесса показан на рис. 3.15, кривая 1.

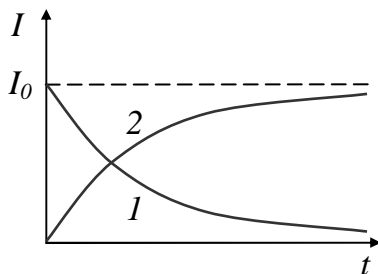


Рисунок 3.15

Можно показать, что при замыкании цепи ток будет нарастать постепенно, в соответствии с законом

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (3.67)$$

чему соответствует кривая 2 на рис. 3.15.

Из формул (3.66) и (3.67) видно, что и нарастание тока при замыкании цепи, и спадание тока при размыкании будут тем быстрее, чем меньше индуктивность и больше сопротивление. Таким образом, наличие индуктивности в цепи обуславливает инерционные свойства цепи.

В момент резкого размыкания цепи, содержащей индуктивность, ЭДС самоиндукции может превышать действующую в цепи ЭДС (до выключения) во много раз. Это может привести к пробоем диэлектрика и большим токам утечки. Поэтому такие цепи следует выключать и включать плавно, чтобы ЭДС самоиндукции не достигала больших значений.

### 3.9 Взаимная индукция. Трансформаторы. Энергия магнитного поля

Пусть у нас имеется 2 контура, расположенных недалеко друг от друга.

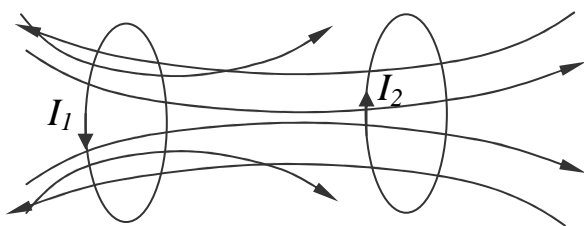


Рисунок 3.16

называется коэффициентом взаимной индукции. Если ток  $I_1$  будет изменяться, и контуры – жёсткие, то во втором контуре будет индуцироваться ЭДС индукции, равная

$$\varepsilon_{s2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (3.69)$$

Аналогично, если будет изменяться ток во втором контуре, то в первом будет индуцироваться ЭДС, и можно записать, что

$$\varepsilon_{s1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (3.70)$$

Соответствующий расчёт (и опыт это подтверждает) показывает, что коэффициенты взаимной индукции равны друг другу:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (3.71)$$

**Явление возникновения в одном контуре ЭДС, при изменении тока в другом контуре, называется явлением взаимной индукции.**

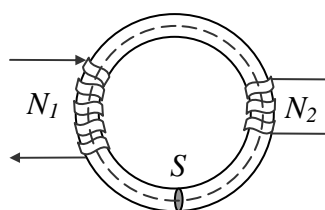


Рисунок 3.17

Потокосцепление со вторым контуром равно

Тогда, если в контуре 1 течёт ток  $I_1$ , то магнитный поток, пронизывающий второй контур, может быть записан как

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1. \quad (3.68)$$

Здесь  $L_{21}$  – коэффициент пропорциональности, который

индуктивности для практически важного случая двух контуров, намотанных на один тороидальный сердечник (тороидальный трансформатор, рис.3.17). Пусть в контуре 1 имеется  $N_1$  витков и через эту обмотку пропускается ток  $I_1$ , а в контуре 2 –  $N_2$  витков.

$$\Psi = \Phi_2 N_2 = B_1 S N_2 = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l_1} S N_2. \quad (3.72)$$

Из сравнения выражений (3.68) и (3.72) и на основании выражения (3.71) находим, что

$$L_{21} = L_{12} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l_1} S. \quad (3.73)$$

Если ток  $I_1$  изменяется во времени, то в контуре 1 возникает ЭДС самоиндукции, а в контуре 2 – ЭДС взаимной индукции. Обмотка 1 тогда называется первичной, а обмотка 2 – вторичной. Можно показать, что отношение ЭДС

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = - \frac{N_2}{N_1}. \quad (3.74)$$

Если  $N_2 > N_1$ , то трансформатор называется *повышающим*, в противном случае трансформатор называется *понижающим*. Знак минус в выражении (3.74) указывает на то, что напряжения в обмотках находятся в противофазе.

Пусть у нас имеется контур  $L$ , по которому течёт ток  $I$ . Магнитный поток самоиндукции равен  $\Phi = LI$ . Для того чтобы увеличить поток на  $d\Phi$ , надо увеличить ток на  $dI$ :

$$d\Phi = L dI. \quad (3.75)$$

Для того чтобы увеличить поток, необходимо затратить работу  $Id\Phi$ . Полная работа на создание магнитного потока будет, очевидно, равна

$$dA = Id\Phi = LI dI. \quad (3.76)$$

Для того чтобы получить полную работу источника ЭДС на создание магнитного потока величины  $\Phi$ , необходимо проинтегрировать уравнение (3.76):

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.77)$$



Работа (3.77) была затрачена на создание магнитного поля  $B$ , следовательно, магнитная энергия, запасённая в контуре,

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.78)$$

Подставим в формулу (3.72) выражение (8.4) для  $L$ :  $L = \mu_0\mu \frac{N^2 S}{l}$ . В результате получим

$$W = \frac{LI^2}{2} = \mu_0\mu \frac{N^2 S}{l} I^2. \quad (3.79)$$

Заменим  $I$  в выражении (3.79), используя выражение (3.11):

$$Bl = \mu_0\mu NI \Rightarrow I = \frac{Bl}{\mu_0\mu N},$$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \mu_0\mu \frac{N^2 S}{l} I^2 = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} Sl = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} V = \frac{BH}{2} V. \quad (3.80)$$

В последнем выражении мы также учли, что  $Sl=V$  – объём соленоида и  $B=\mu_0\mu H$ . Мы знаем, что магнитное поле сосредоточено внутри соленоида и однородно. Это означает, что энергия магнитного поля распределена по соленоиду так же однородно с объёмной плотностью

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (3.81)$$

Хотя формула (3.81) получена для однородного поля, она справедлива и для неоднородного.

### 3.10 Магнитные моменты электронов и атомов.

#### Намагниченность вещества. Диа- и парамагнетики

Все вещества реагируют на наличие магнитного поля, поэтому все вещества являются **магнетиками**. Мы раньше формально учитывали

магнитные свойства среды при помощи магнитной проницаемости  $\mu$ . Сейчас мы попытаемся определить, какими же процессами в веществе определяется изменение  $\mu$  или, другими словами, почему вещества ведут себя по-разному в магнитном поле. Наше рассмотрение будет качественным и основанным на гипотезе Ампера, согласно которой в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах. При этом движение электрона по орбите рассматривается в рамках классических представлений. При таком движении электрон создаёт круговой ток  $I=ev$  ( $e$  – заряд электрона,  $v$  – частота вращения) и, следовательно, обладает орбитальным магнитным моментом

$$p_m = IS = evS. \quad (3.82)$$

Кроме того, было установлено, что электрон обладает собственным магнитным (его ещё называют спиновым) магнитным моментом. Под спином понимают собственный механический момент импульса электрона. Но любой заряд, обладающий механическим моментом импульса, обладает и магнитным моментом. Было также установлено, что проекция спинового магнитного момента на направление внешнего поля может принимать только 2 значения, которые называются магнетонами Бора:

$$p_{msB} = \pm \frac{eh}{2m} = \pm \mu_B. \quad (3.83)$$

Здесь  $h$  – постоянная Планка, а  $\mu_B$  – так называемый магнетон Бора. Таким образом, суммарный магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового магнитных моментов. Магнитный момент атома  $\vec{p}_a$ , в свою очередь, должен складываться из магнитных моментов электронов и магнитных моментов ядер. Последние, однако, в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов (см. 11.2), поэтому можно записать, что

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}. \quad (3.84)$$

Для характеристики магнитных свойств веществ вводится величина, которая называется *намагниченность* и которую для однородного вещества можно определить как магнитный момент единицы объёма:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V}. \quad (3.85)$$

Имеются вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атомов, а, следовательно, и намагниченность, равны нулю. Такие вещества называются *диамагнетиками*. Если включить внешнее магнитное поле, то, в соответствии с законом Ленца, на движение электронов в атоме будет накладываться движение (такое движение называют прецессией), которое будет порождать магнитный момент (магнитное поле), направленное против внешнего поля. Подчеркнём, что такое индуцированное поле, ослабляющее внешнее поле, будет наблюдаться у всех веществ, независимо от того, имеют ли атомы собственный магнитный момент или нет. Просто для диамагнетиков этот эффект проявляется в чистом виде (поэтому он и называется диамагнитным). Итак, можно дать двойное определение диамагнетиков. С одной стороны – это вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствие внешнего магнитного поля равны нулю. С другой стороны – это вещества, которые ослабляют внешнее магнитное поле.

Имеется ещё один класс веществ, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов не равны нулю, но вследствие теплового движения магнитные моменты атомов направлены хаотически, и намагниченность равна нулю. Такие вещества называются *парамагнетиками*. Внешнее магнитное поле оказывает ориентирующее воздействие на магнитные моменты атомов, каждый из которых приобретает составляющую магнитного момента вдоль направления внешнего поля. Подчеркнём, что и парамагнетикам присущ диамагнитный эффект, но определяющим его магнитные свойства является именно ориентирующее действие внешнего магнитного поля на магнитные моменты атомов.

### 3.11 Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля. Ферромагнетики

На основании изложенного, можно записать, что магнитное поле в рассмотренных веществах (диамагнетиках и парамагнетиках) можно представить в виде суммы двух слагаемых – внешнего магнитного поля и магнитного поля  $\mathbf{V}'$ , обусловленного микротоками вещества:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}' \quad (3.86)$$

Можно показать, что

$$\mathbf{V}' = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.87)$$

Для не очень сильных магнитных полей намагниченность прямо пропорциональна напряжённости поля  $\mathbf{H}$ , вызвавшего эту намагниченность:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} \quad (3.88)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $\chi$  называется магнитной восприимчивостью вещества. С учётом уравнений (3.87) и (3.88) выражение для магнитного поля в магнетике (3.86) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}' = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \Rightarrow \\ \mathbf{V} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

или

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 (1 + \chi)} \quad (3.90)$$

Величина  $\mu = 1 + \chi$  называется магнитной проницаемостью вещества. С учётом сделанного замечания вместо выражения (3.90) можно записать:

$$\mathbf{V} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (3.91)$$

С учётом новых введённых величин, для диамагнетиков  $\chi < 0$  и  $\mu < 1$ , а для парамагнетиков  $\chi > 0$  и  $\mu > 1$ .

Подчёркнём, что вспомогательная величина  $H$  – напряжённость магнитного поля, создаётся только внешними токами – токами проводимости. Тогда для напряжённости магнитного поля можно сформулировать закон полного тока в таком виде: **циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром**

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k . \quad (3.92)$$

Кроме диа- и парамагнетиков, которые являются слабыми магнетиками, существуют и сильно магнитные вещества, которые могут обладать спонтанной намагниченностью и без внешнего магнитного поля. Зависимость от напряженности внешнего магнитного поля намагниченности  $J=f(H)$  и магнитной индукции  $B=\varphi(H)$  для ферромагнетиков имеет сложный характер. На рис. 3.18, *а* и *б*, показано, какой вид имеет эта зависимость для изначально ненамагниченного ферромагнитного образца (основная или нулевая кривая намагничивания).

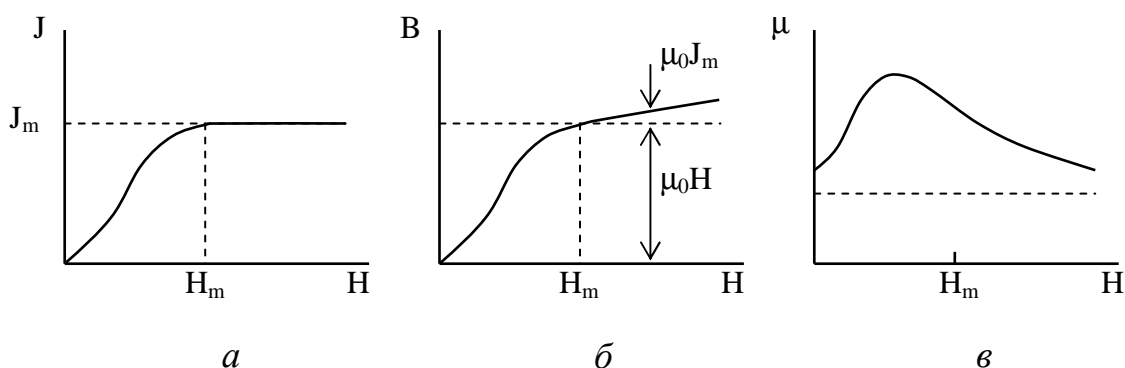


Рисунок 3.18

При некоторой напряженности внешнего магнитного поля  $H_m$  намагниченность достигает насыщения  $J_m$ , причем насыщение наступает в слабых магнитных полях. Основная кривая намагничивания в координатах  $B$  и  $H$  приведена на рис. 3.18, *б*.

Ферромагнетики не могут характеризоваться такими постоянными величинами, как магнитная восприимчивость  $\chi$  и магнитная восприимчивость  $\mu$ . Это объясняется нелинейной зависимостью  $J$  от  $H$  и  $B$  от  $H$  для ферромагнетиков, а потому  $\chi$  и  $\mu$  зависят от напряженности внешнего магнитного поля. На рис. 3.18, в приведена типичная для ферромагнетиков зависимость  $\mu$  от  $H$ . При  $H=0$  магнитная проницаемость больше единицы, это так называемая начальная проницаемость. С увеличением  $H$  функция  $\mu(H)$  увеличивается и достигает максимума, а затем в сильных магнитных полях, когда достигнуто состояние насыщения, величина снова стремится к единице.

Зависимость  $B$  от  $H$  и  $J$  от  $H$ , кроме нелинейности, характеризуется также неоднозначностью. Эта неоднозначность носит название магнитного гистерезиса и проявляется в том, что магнитные свойства ферромагнетика зависят от тех магнитных взаимодействий, в которых он участвовал раньше. На рис. 3.19 кривая 0-1 отвечает намагничиванию до насыщения

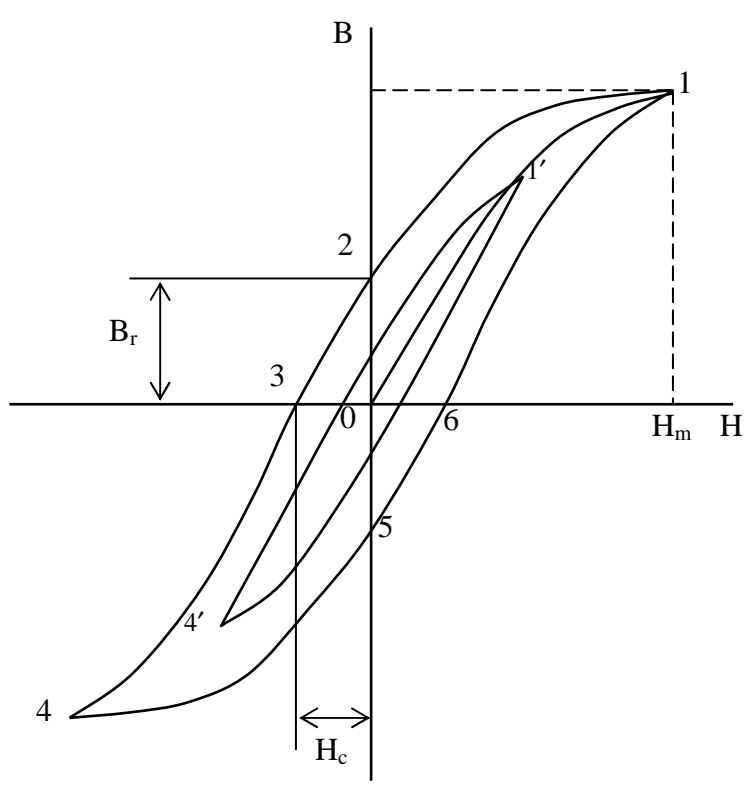


Рисунок 3.19

(точка 1 – вершина петли гистерезиса) изначально не намагниченного ферромагнетика.

Если затем уменьшать внешнее магнитное поле  $H$ , то индукция  $B$  поля в ферромагнетике будет принимать значения соответственно кривой 1-2. При  $H=0$  намагниченность не исчезнет, магнитное поле образца

характеризуется индукцией  $B_r$ , которую называют остаточной индукцией (ей соответствует остаточная намагниченность  $J_m$ ). Для уничтожения остаточной индукции вещества и полного размагничивания образца

необходимо поместить его во внешнее поле обратного знака с напряженностью  $H_C$ , которая называется коэрцитивной силой (точка 3). Если поле обратного знака и далее увеличивать, то намагниченность ферромагнетика снова достигнет насыщения (точка 4). При дальнейшем уменьшении обратного поля, а затем изменении его направления магнитная индукция  $B$  будет меняться, и ее значения будут соответствовать другой кривой – 4-5-6-1. Таким образом, при действии на ферромагнетик переменного магнитного поля индукция  $B$  в веществе изменяется, следуя замкнутой кривой 1-2-3-4-5-6-1. Эта кривая называется петлей гистерезиса. Начальная и максимальная магнитные проницаемости, а также остаточная индукция  $B_r$  и коэрцитивная сила  $H_C$ , являются основными характеристиками вещества ферромагнетика. Эти характеристики зависят от химического состава и внутреннего строения вещества.

Изменение напряженности внешнего поля  $H$  в границах, не обеспечивающих насыщение ( $H < H_m$ ), ведет к возникновению немаксимальной петли гистерезиса. Она будет лежать внутри

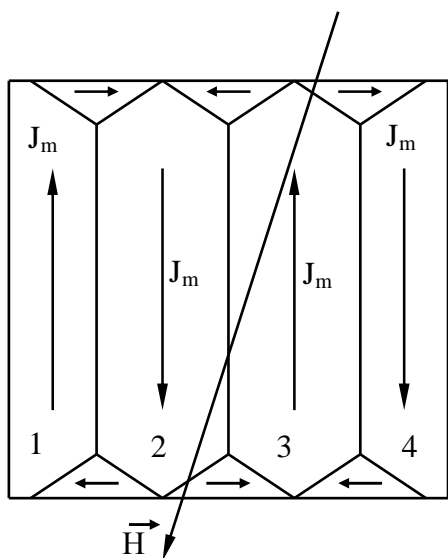


Рисунок 3.20

максимальной петли и носить название частного цикла (рис. 7.4, кривая 1'-4'-1'). При этом вершина петли гистерезиса – точка 1' будет всегда на основной (нулевой) кривой намагничивания 0-1.

Магнитные свойства ферромагнетиков определяются наличием между электронами соседних атомов так называемого обменного взаимодействия, имеющего особую квантово-механическую природу. Это взаимодействие возникает при наложении

друг на друга электронных оболочек атомов и заставляет магнитные моменты всех атомов ориентироваться в одном направлении. В ферромагнетике большого объема образуются области самопроизвольного (спонтанного) намагничивания – домены, размеры доменов от 1 до 10 мкм. Ферромагнетик в пределах домена намагничен до насыщения  $J_m$ , т.е.

магнитные моменты всех атомов имеют одно направление. В первоначально не намагниченном состоянии направления намагниченности соседних доменов противоположны, так что суммарный магнитный момент образца равен нулю (рис. 3.20).

Результирующие магнитные моменты соседних доменов сориентированы так, что образуют замкнутое магнитное поле, энергия которого минимальна. При намагничивании и перемагничивании ферромагнетика во внешнем магнитном поле  $H$  происходят два процесса. Сначала растут домены, намагниченности которых  $J_m$  составляют небольшой угол с полем  $H$  (домены 2 и 4 на рис. 7.5). Рост происходит за счет тех доменов, у которых этот угол большой (домены 1 и 3). Это явление называется *процессом смещения*, в слабых магнитных полях он является обратимым. Процесс смещения ведет к уменьшению энергии ферромагнетика во внешнем магнитном поле, поэтому он энергетически выгоден. При дальнейшем увеличении напряженности магнитного поля происходит ориентация векторов спонтанной намагниченности доменов  $J_m$  по направлению внешнего поля. При этом магнитные моменты атомов в пределах домена поворачиваются одновременно, без нарушения параллельности друг другу. Это называется *процессом вращения*. Процесс вращения доменов необратим и служит причиной возникновения гистерезиса. Необратимость процесса намагничивания связана также с «задержкой» в смещении границ между доменами, которая вызывается различными искажениями кристаллической решетки (включения, неоднородности, внутренние напряжения и т.п.).

### 3.12 Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла

Как мы знаем из закона электромагнитной индукции Фарадея, в замкнутом контуре индуцируется ЭДС при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.93)$$



Если контур (проводник) движется, то причиной возникновения ЭДС может быть сила Лоренца. Если же контур неподвижен, то и в этом случае, как показывает опыт, в нём возникает ЭДС, определяемая уравнением (3.93). Какова же в этом случае причина возникновения ЭДС? Под действием ЭДС в контуре возникает электрический ток. Это значит, что на электроны проводника действует электрическое поле. Если контур жёсткий, то можно записать

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

или

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.94)$$

(Мы поставили знак частной производной, поскольку магнитная индукция может зависеть и от координаты и от времени.) Из 14.2 следует, что циркуляция этого поля по замкнутому контуру не равна нулю, в отличие от электростатического поля. Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает *вихревое* электрическое поле, независимо от того, имеется у нас проводящий контур или нет. Просто если он есть, то позволяет зарегистрировать вихревое электрическое поле  $\vec{E}_B$ .

Левую часть уравнения (3.94) можно преобразовать по формуле Стокса  $\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E}_B d\vec{S}$ . Тогда, вместо уравнения (3.94), получим

$$\int_S \text{rot} \vec{E}_B d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.95)$$

Поскольку интегрирование может производиться по любой поверхности, опирающейся на контур  $L$ , то в каждой точке этой поверхности должны равняться подынтегральные выражения

$$\text{rot} \vec{E}_B = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.96)$$

Поле  $\vec{E}_B$  существенно отличается от электростатического поля, для которого, как мы помним, циркуляция по замкнутому контуру равна нулю:

$\int_L \vec{E}_q d\vec{l} = 0$ , а значит, в соответствии с теоремой Стокса, и ротор этого поля

в любой точке равен нулю:

$$\int_L \vec{E}_q dl = \int_S \text{rot} \vec{E}_q d\vec{S} = 0 \Rightarrow \text{rot} E_q = 0 . \quad (3.97)$$

В общем случае

$$\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q, \quad (3.98)$$

но для ротора суммарного поля, в силу уравнения (3.97), остаётся справедливым соотношение (3.96). Таким образом,

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.99)$$

Поскольку переменное магнитное поле порождает электрическое, как это следует из закона индукции Фарадея и полученной нами из этого закона формулы (3.99), то должно существовать и обратное явление – переменное электрическое поле должно порождать магнитное поле. Для установления количественных соотношений рассмотрим процесс заряда конденсатора.

Для начала определим поле вблизи поверхности металлической обкладки конденсатора. Применим теорему Гаусса для вектора электрического смещения к одной из обкладок

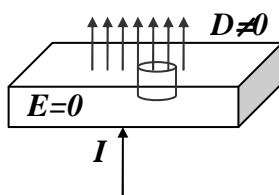


Рисунок 3.21

(рис. 3.21). Внутри металла поле равно нулю, а снаружи направлено перпендикулярно поверхности. Следовательно, поток через весь цилиндр сведётся к потоку через верхнее основание цилиндра площадью  $dS$ . И этот поток должен равняться заряду, заключённому внутри

нашего цилиндра, или  $DdS = \sigma dS$ , или

$$D = \sigma. \quad (3.100)$$

Здесь  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов на обкладке конденсатора.

Как мы уже говорили, Максвелл предположил, что изменяющееся электрическое поле создаёт магнитное поле. Но мы знаем, что постоянное

магнитное поле создаётся токами. Поэтому естественно предположение, что должен быть ещё один ток, который Максвелл назвал током смещения и который ответственен за создание магнитного поля. Для установления вида этого тока смещения, рассмотрим соотношение (3.100) справа налево, а именно

$$\sigma = D. \quad (3.101)$$

Умножим обе части на площадь пластины  $S$  и получим

$$q = \sigma S = DS. \quad (3.102)$$

Здесь  $q$  – заряд пластины конденсатора. Во время заряда конденсатора ток в подводящем проводе

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} S = \frac{dD}{dt} S. \quad (3.103)$$

Разделив обе части последнего уравнения на площадь пластины  $S$ , получим слева ток проводимости  $j = I/S$ , а справа – плотность нового, максвелловского тока, или плотность тока смещения. Таким образом,

$$\vec{j}_{displace} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.104)$$

В последнем уравнении мы поставили значки векторов – для общего случая и написали частную производную, поскольку в общем случае вектор электрического смещения может зависеть и от координаты.

Проанализировав полученные результаты, Максвелл ввёл понятие общего тока как суммы токов проводимости и тока смещения. Здесь подчеркнём, что ток смещения – это просто название изменяющегося во времени электрического поля. Единственная функция тока смещения – создавать магнитное поле. Тогда обобщенный закон полного тока будет иметь вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{tot} d\vec{S} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (3.105)$$

или окончательно

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (3.106)$$

Максвелл создал замкнутую макроскопическую теорию электромагнитного поля. В основе этой теории лежат его знаменитые уравнения. Первая пара связывает основные характеристики электрического и магнитного полей

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad (3.107)$$

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.108)$$

В уравнении (3.107) под полем  $E$  надо понимать полное поле – поле, созданное неподвижными зарядами, и поле, созданное изменяющимся магнитным полем. Уравнение (3.108) отражает тот факт, что в природе нет магнитных зарядов.

Вторая пара уравнений Максвелла связывает вспомогательные характеристики электрического и магнитного полей

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad (3.109)$$

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \rho. \quad (3.110)$$

Уравнение (3.109) является следствием того, что магнитное поле создаётся как токами проводимости, так и токами смещения (изменяющимся во времени электрическим полем). И уравнение (3.110) говорит нам, что источниками электрического поля (помимо изменяющегося магнитного поля) являются электрические заряды. Уравнения Максвелла (3.107)...(3.110) называются уравнениями Максвелла в интегральной форме.

Уравнения Максвелла дополняются так называемыми материальными уравнениями, которые устанавливают связь между

вспомогательными и основными характеристиками полей. Для однородной и изотропной неферромагнитной среды эти уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \quad \vec{j} = \sigma\vec{E} \quad (3.111)$$

Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей, поскольку в природе нет магнитных зарядов.

Уравнения Максвелла позволили предсказать существование электромагнитных волн – распространяющихся в пространстве со скоростью света переменных электрического и магнитного полей. Вскоре электромагнитные волны были обнаружены немецким физиком Г.Герцем. Оказалось, что их свойства полностью описываются уравнениями Максвелла. Это также позволило Максвеллу создать электромагнитную теорию света – как электромагнитных волн с длиной волны  $\lambda = 0.4...0.7\mu m$ .

Если применить к уравнениям (3.107)...(3.110) теоремы Гаусса и Стокса, то получим уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad (3.112)$$

$$div\vec{B} = 0; \quad (3.113)$$

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}; \quad (3.114)$$

$$div\vec{D} = \rho. \quad (3.115)$$

Уравнения (3.98)...(3.101) связывают локальные характеристики поля в каждой точке.

## 4 КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### 4.1 Колебания. Типы колебаний. Характеристики колебаний. Гармонические колебания

Колебаниями называются процессы, в той или иной мере повторяющиеся во времени. Колебания бывают механические, электромагнитные, численности животных и т.д. Здесь важно отметить,

что независимо от типа колебаний, все они описываются одинаковым образом с математической точки зрения, т.е., одинаковыми уравнениями. Поэтому колеблющуюся величину мы будем часто называть **колебательной системой**.

Иногда колебания играют отрицательную роль в технике – например, вибрация (что означает колебания со звуковой частотой) корпуса автомобиля, корабля, самолёта.... В других случаях колебания не просто играют положительную роль, но на колебаниях основаны самые различные отрасли техники – например радиовещание, телевидение да и вообще вся инфраструктура передачи информации.

В зависимости от характера внешнего воздействия на колебательную систему различают свободные и вынужденные колебания.

**Свободными, или собственными** называются колебания системы, выведенной из положения устойчивого равновесия внешней силой и затем предоставленной самой себе. Колебания при этом совершаются за счёт внутренних сил системы.

**Вынужденными** называются колебания, происходящие под действием периодически изменяющегося внешнего воздействия на систему.

**Периодическими** называются такие колебания, при которых значения физических величин (например, некоторой величины  $S$ ), характеризующих колебательную систему, повторяются через равные промежутки времени, наименьший из которых называется **периодом** колебаний:

$$S(t+T)=S(t). \quad (4.1)$$

**Частотой** колебаний называется число полных колебаний в единицу времени:  $\nu = \frac{1}{T}$ . Размерность частоты – герц: Гц = 1/с.

**Циклической**, или круговой, частотой называется число полных колебаний за  $2\pi$  секунд:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (4.2)$$

Чрезвычайно важными в теории колебаний являются гармонические колебания – это такие колебания, которые происходят по закону синуса или косинуса:

$$\begin{aligned} S &= A \sin(\omega t + \varphi_{01}) \\ S &= A \cos(\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Во-первых, очень многие колебания, особенно малые, в технике имеют гармонический вид (4.3). Во-вторых, любые периодические процессы, которые не являются гармоническими, могут, тем не менее, быть представлены как наложение простых гармонических колебаний. Часто систему, совершающую гармонические колебания, называют гармоническим осциллятором.

В системе (4.3)  $A \equiv S_{max}$  – максимальное значение колеблющейся величины, называется амплитудой колебаний. Аргумент синуса или косинуса называется фазой колебаний:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= (\omega t + \varphi_{01}) \\ \Phi_2(t) &= (\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

а значение фазы в начальный момент времени  $\varphi_{01}, \varphi_{02}$  называется начальной фазой. Отметим, что с изменением начала отсчёта времени изменяется и начальная фаза. Так как функции (4.3) являются периодическими с периодом  $2\pi$ , то всегда можно выбрать начальную фазу по модулю меньшей  $\pi$ .

Хотя функции синуса и косинуса являются взаимно дополняющими друг друга, по ряду причин чаще для представления гармонических колебаний используют функцию косинуса. Например, математические выражения чаще оказываются более простыми, если представлять гармоническое колебание в комплексном виде:

$$S^* = A e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (4.5)$$

Здесь  $i = \sqrt{-1}$ . Такое представление основано на доказываемой в математике формуле Эйлера:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha . \quad (4.6)$$

В соответствии с выражением (4.6) вещественная часть уравнения (4.5) представляет собой гармоническое колебание

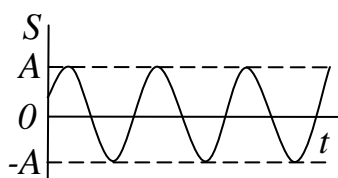


Рисунок 4.1

$$\operatorname{Re} S^* = S = A \cos(\omega t + \varphi_{02}) . \quad (4.7)$$

Графически вид гармонических колебаний (4.3) показан на рисунке 4.1. Ещё раз отметим, что функция, изображённая на этом рисунке, может быть представлена как синусом, так и косинусом – естественно, с разными начальными фазами.

## 4.2 Метод векторных диаграмм. Сложение гармонических сонаправленных и взаимно перпендикулярных колебаний

В некоторых случаях гармонические колебания удобно изображать при помощи метода векторных диаграмм. Возьмём ось  $X$  и на ней точку  $O$ . Из этой точки отложим вектор длиной  $A$  под углом  $\varphi$  к оси  $X$  (рис. 4.2). Если вращать этот вектор с частотой  $\omega$ , то проекция этого вектора на ось  $X$  будет изменяться по закону

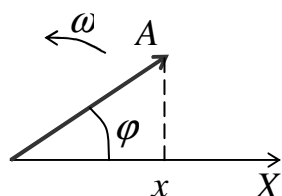


Рисунок 4.2

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) .$$

Таким образом, проекция вектора на ось  $X$  будет совершать гармоническое колебание с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора и с начальной фазой, равной углу, который образует вектор  $A$  с осью  $X$  в начальный момент времени.

Воспользуемся методом векторных диаграмм для сложения двух колебаний одинаково направленных и с одинаковой частотой. Т.е., пусть результирующее смещение будет суммой двух смещений  $x = x_1 + x_2$ , причём

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$



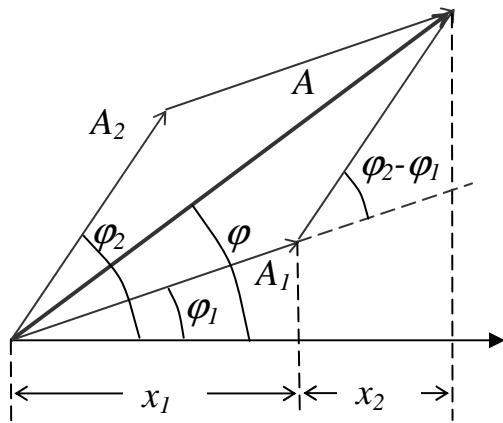


Рисунок 4.3

Представим оба колебания при помощи метода векторных диаграмм (рис. 4.3). В соответствии с правилом сложения векторов получим результирующий вектор  $A$ . Из рисунка видно, что его проекция на ось  $X$  равна сумме проекций слагаемых векторов  $x_1$  и  $x_2$ . Другими словами, вектор  $A$  действительно является суммой двух колебаний. Этот вектор вращается с той же угловой

скоростью, что и вектора-слагаемые, т.е.

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.8)$$

причём, как это видно из рис. 4.9,

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (4.10)$$

Мы продемонстрировали возможности метода векторных амплитуд на примере сложения двух колебаний. Особенно удобен этот метод, когда надо складывать много колебаний – мы просто складываем векторы по правилу сложения векторов.

Как следует из выражения (4.9), если разность фаз складываемых колебаний равна 0, то результирующая амплитуда будет просто равна сумме амплитуд. Складываемые колебания в этом случае называются **синфазными**, а колебания, у которых разность фаз не изменяется с течением времени, называются **когерентными**. Если же разность фаз равна  $\pi$ , то результирующая амплитуда будет равна разности амплитуд складываемых колебаний. О таких колебаниях говорят, что они происходят в **противофазе**. Если же частоты складываемых колебаний неодинаковы, то векторы-слагаемые будут вращаться с разными угловыми

скоростями, а результирующий вектор будет изменяться по величине и вращаться с изменяющейся угловой скоростью. Результирующее колебание при этом уже не будет гармоническим.

Особый интерес представляет сложение двух гармонических колебаний с близкими (но разными!) частотами. В этом случае результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называют *биениями*.

Итак, будем складывать 2 колебания с близкими частотами, т.е. будем считать, что  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2$ . Для упрощения формул будем складывать колебания с одинаковыми амплитудами, а начальные фазы обоих колебаний положим равными нулю:

$$x_1 = A \cos \omega t; \quad x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

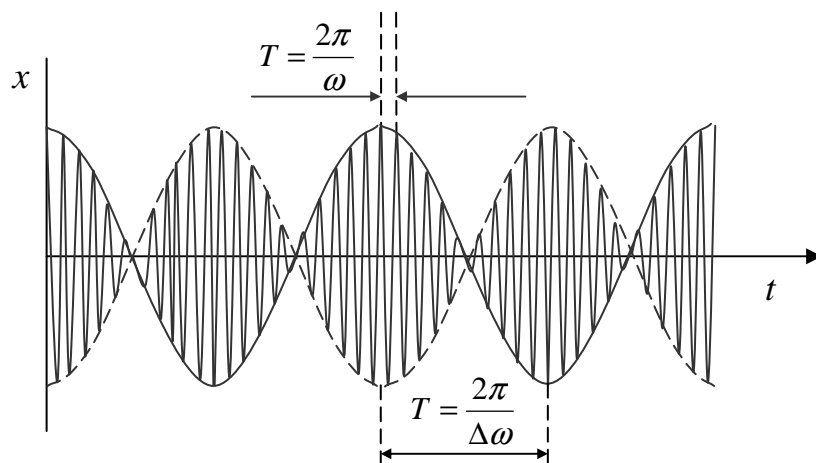


Рисунок 4.4

Применяя формулу сложения косинусов  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ , получим

$$x = x_1 + x_2 = \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t. \quad (4.11)$$

Здесь мы пренебрегли во втором сомножителе слагаемым  $\frac{\Delta\omega}{2}$  по сравнению с  $\omega$ . График результирующей функции (4.17) показан на

рис. 4.4. Из рисунка видно, что мы можем рассматривать результирующее колебание как гармоническое с периодически изменяющейся амплитудой:

$$A^* = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (4.12)$$

Пусть теперь частица одновременно совершает колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, например, вдоль осей  $y$  и  $x$ . Фазу колебания вдоль оси  $x$  положим равной 0.

$$x = A \cos \omega t; \quad y = B \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.13)$$

Чтобы получить уравнение траектории в координатах  $x$  и  $y$ , из уравнений (4.13) необходимо исключить время. Из первого уравнения (4.13) следует, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}; \quad \sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (4.14)$$

Теперь раскроем косинус во втором уравнении (4.13) в соответствии с формулой  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ . В результате получим

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi \mp \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (4.14)$$

Возведём в квадрат выражение (4.14), приведём подобные члены и, последовательно, получим:

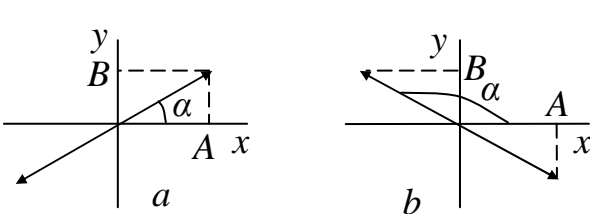
$$\left( \frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi \right)^2 = \sin^2 \varphi \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{A^2} \right),$$

$$\frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi,$$

$$\frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2 \varphi. \quad (4.15)$$

Последнее уравнение (4.15) представляет собой уравнение эллипса, оси которого повернуты произвольным образом относительно осей  $x$  и  $y$ . Ориентация осей и форма эллипса зависят от разности фаз  $\varphi$ . Проанализируем выражение (4.15) для некоторых частных случаев.

1 Разность фаз складываемых колебаний:  $\varphi = \pm m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Тогда в выражении (4.86)  $\cos\varphi = \pm 1$ ; и  $\sin\varphi = 0$  и в результате вместо выражения (4.15) получим уравнение прямой (говорят, что эллипс вырождается в прямую):



$$y = \pm \frac{B}{A} x \quad (4.16)$$

Рисунок 4.5

где знак “+” соответствует нулю и чётным значениям  $m$  (рис. 4.5, а), а знак “-” соответствует нечётным значениям  $m$  (рис. 4.5, б).

Результирующее колебание будет гармоническим с частотой  $\omega$  и амплитудой  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Угол  $\alpha = \arctg \frac{B}{A}$ . Такие колебания называются **линейно-поляризованными**.

2 Пусть теперь разность фаз складываемых колебаний:  $\varphi = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ , ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Тогда уравнение (4.15) примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (4.17)$$

Это есть уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны, соответственно,  $A$  и  $B$ . Такие колебания называются **эллиптически поляризованными**. Если ещё и  $A=B$ , то эллипс вырождается в окружность, и колебания в этом случае называются **циркулярно-поляризованными**. Анализ показывает (провести самостоятельно), что при  $\alpha = \pi/2$  точка вращается по часовой стрелке, при  $\alpha = -\pi/2$  – против.

Если частоты складываемых колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания имеет сложную форму, которая

зависит от соотношения частот и фаз складываемых колебаний. В этом случае результирующие кривые называются фигурами Лиссажу. Эти фигуры протабулированы, и их анализ позволяет делать заключение о характеристиках одного колебания, если характеристики другого известны.

### 4.3 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Физический и математический маятники

Гармонические колебания (4.3) являются решением дифференциального уравнения гармонических колебаний

$$\ddot{S} + \omega^2 S = 0, \quad (4.18)$$

в чём можно убедиться непосредственной подстановкой. В самом деле,

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi), \\ \ddot{S} &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 S. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Следует также отметить, что систему, совершающую гармонические колебания, называют *гармоническим осциллятором*.

В качестве примера гармонических колебаний рассмотрим колебания груза на пружине вдоль оси  $x$ . Эти колебания, как мы знаем, происходят под действием упругой силы  $F = -kx$ . Это уравнение можно переписать как

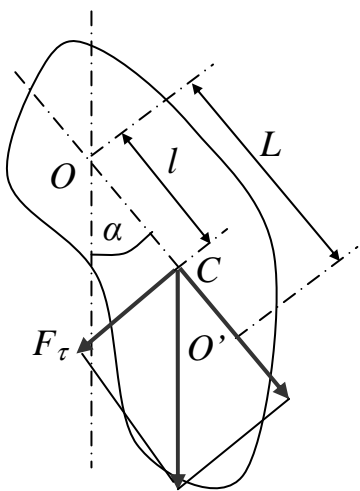
$$m \ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (4.20)$$

Если в последнем уравнении обозначить  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , то придём к уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4.21)$$

которое абсолютно подобно уравнению (4.18). На основании подобной аналогии силы, под действием которых совершаются гармонические колебания, называют *квазиупругими*.

Физическим маятником называют колебания твёрдого тела под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела (точку  $C$  на рис. 4.6). Отведём маятник из положения равновесия на некоторый малый угол  $\alpha$ . Запишем теперь 2-й закон Ньютона для вращательного движения



$mg$   
Рисунок 4.6

$$M = J \ddot{\alpha}. \quad (4.22)$$

Здесь момент возвращающей силы  $M$  для малых углов  $\alpha$

$$M = F_{\tau} l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha. \quad (4.23)$$

В уравнении (4.23) знак “-” отражает тот факт, что направления возвращающей силы  $F_{\tau}$  и угла  $\alpha$  всегда противоположны.

$J$  – момент инерции маятника относительно точки подвеса  $O$ . Объединяя выражения (4.22) и (4.23), придём к уравнению

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0. \quad (4.24)$$

Обозначим  $\omega^2 = \frac{mgl}{J}$  и окончательно получим

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0. \quad (4.25)$$

Решение последнего уравнения мы знаем:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.26)$$

Таким образом, при малых отклонениях из положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \text{ и периодом}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (4.27)$$

где  $L = \frac{J}{ml}$  называется *приведенной длиной* физического маятника.

Точка  $O'$ , которая находится на расстоянии приведенной длины от точки подвеса, называется центром качаний физического маятника. Точка подвеса маятника  $O$  и центр качаний обладают свойством взаимности – если маятник перевернуть и подвесить за точку  $O'$ , то период колебания маятника не изменится.

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на длинной тонкой нерастяжимой нити и совершающая колебания под действием силы тяжести. Момент инерции материальной точки, подвешенной на нити длиной  $l$ , относительно точки подвеса

$$J = ml^2. \quad (4.28)$$

Подставим уравнение (4.199) в уравнение (4.198) и получим известную со школы формулу для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.29)$$

Из сравнения формул (4.29) и (4.27) видно, что если приведенная длина физического маятника равна длине математического маятника, то их периоды совпадают. Т.о. приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, у которого период колебаний равен периоду физического маятника.

#### 4.4 Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и анализ его решений

Гармонические колебания происходят в системе, свободной от потерь энергии. В этом случае полная механическая энергия колеблющейся системы сохраняется. В жизни, однако, потери энергии присутствуют всегда. Механическая энергия расходуется, как мы уже говорили, против работы диссипативных сил. Амплитуда колебаний при этом, естественно, уменьшается, а сами колебания называются затухающими. В очень важном случае не очень больших потерь энергии сила сопротивления (сила трения) пропорциональна скорости частицы, совершающей колебательное движение:

$$F_{\text{соп}} = -r \dot{S}. \quad (4.30)$$

Здесь  $r$  называется коэффициентом сопротивления среды.

Таким образом, при наличии сопротивления среды колебания происходят под действием двух сил – упругой (квазиупругой) и силы сопротивления. В таком случае 2-й закон Ньютона для такой системы имеет вид

$$m \ddot{S} = -kS - r \dot{S}. \quad (4.31)$$

Последнее уравнение обычно записывают в виде

$$\ddot{S} + 2\beta \dot{S} + \omega_0^2 S = 0 \quad (4.32)$$

и называют дифференциальным уравнением затухающих колебаний. Здесь  $\beta = \frac{r}{2m}$  называют коэффициентом затухания, а  $\omega_0^2 = k/m$  – частота собственных колебаний системы (собственная частота) в отсутствие сил сопротивления ( $r=0$ ), на что указывает нижний индекс – 0.

Уравнения типа (4.32) в математике называют однородным линейным (все производные в первой степени) дифференциальным уравнением второго порядка (старшая производная – вторая) с



постоянными коэффициентами. Решением такого уравнения является функция

$$S = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (4.33),$$

где  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда затухающих колебаний,  $e$  – основание натурального логарифма,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – собственная циклическая частота затухающих колебаний. На рис. 4.30 показан график функции (4.33).

В соответствии с уравнением (4.33) движение колебательной системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой  $\omega$  и с изменяющейся по экспоненциальному закону амплитудой  $A(t)$ . Начальное смещение  $S_0$  зависит как от амплитуды в начальный момент времени  $A_0$ , так и от начальной фазы  $\varphi_0$ :  $S_0 = A_0 \cos \varphi_0$ .

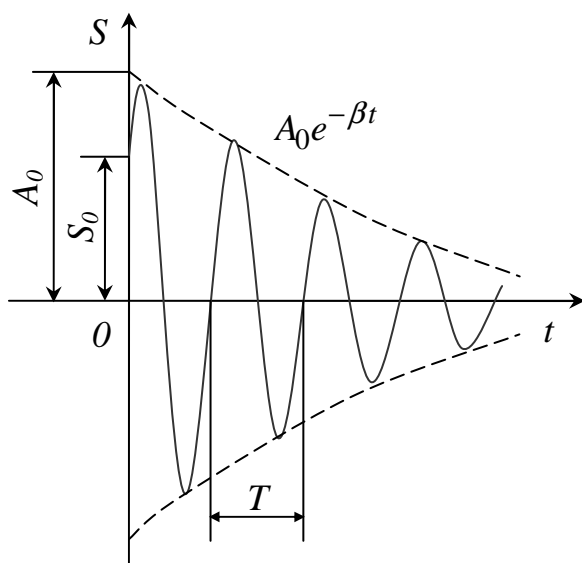


Fig.10.1

Рисунок 4.7

Найдём время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз – так называемое время релаксации:  $e^{-\beta \tau} = e^{-1}$ . Следовательно,  $\beta \tau = 1$ , или  $\beta = 1/\tau$ , т.е. коэффициент затухания равен обратному времени релаксации.

Отношение двух последующих через период амплитуд называется декрементом затухания:

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}, \quad (4.34)$$

а натуральный логарифм этого отношения называется **логарифмическим декрементом затухания**:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \quad (4.35)$$

За время релаксации система совершит  $N_e = \tau T$  колебаний. С учётом этого, а также принимая во внимание, что  $\beta = 1/\tau$ , получим

$$\lambda = \beta T = \frac{1}{\tau} T = \frac{1}{N_e}. \quad (4.36)$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания является величиной, обратной числу колебаний, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Для характеристики колебательной системы также используют величину, которая называется добротностью и определяется как

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (4.37)$$

Из формулы (4.37) видно, что добротность пропорциональна числу колебаний, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Можно показать, что зависимость полной энергии  $E = \frac{1}{2}kS^2 + \frac{1}{2}m\dot{S}^2$  от времени даётся выражением

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (4.38)$$

где  $E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2$ . Продифференцировав уравнение (4.38) по времени, найдём, что скорость убывания энергии определяется как

$$-\frac{dE}{dt} = 2\beta E. \quad (4.39)$$

При малом затухании, когда убыль энергии за период невелика, приближённо можно считать, что

$$-\frac{\Delta E}{T} = 2\beta E, \text{ или } -\Delta E = 2\beta TE, \quad (4.40)$$

откуда находим, что

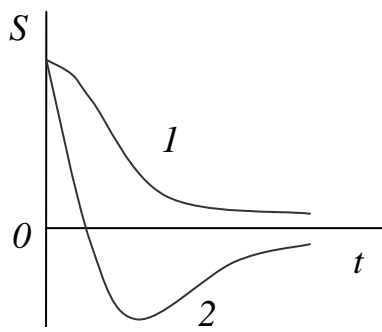


Рисунок 4.8

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\lambda} = \frac{Q}{2\pi}. \quad (4.41)$$

Таким образом, получили, что при малом затухании добротность с точностью до множителя  $1/2\pi$  равна отношению энергии, запасённой к данному моменту времени, к убыли этой энергии за 1 период колебаний.

Период затухающих колебаний определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (4.42)$$

из которого следует, что по мере увеличения коэффициента затухания  $\beta$  период стремится к бесконечности, т. е. движение перестаёт быть периодическим. При большом затухании  $\beta > \omega$  система, выведенная из положения равновесия, возвращается к нему, не совершив ни одного колебания. Такое движение называется *апериодическим*. Анализ показывает, что возможны 2 вида апериодического движения, показанные на рис. 4.8. Какой из видов реализуется на практике, зависит от начальных условий. Кривая 1 описывает апериодический процесс, когда систему вывели из положения равновесия и отпустили с нулевой начальной скоростью. Кривая 2 соответствует случаю, когда системе дали начальный толчок к положению равновесия. Другими словами, для случая 1 начальная скорость равна нулю, а для случая 2 она отлична от нуля.

#### 4.5 Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и анализ его решений. Резонанс

Теперь рассмотрим случай, когда на колебательную систему действует внешняя, периодически изменяющаяся сила. Тогда в выражение, определяемое вторым законом Ньютона (4.31), в правой части добавится сила  $F \cos \alpha t$ :

$$m\ddot{S} = -kS - r\dot{S} + F\cos\omega t. \quad (4.43)$$

Или, используя обычные обозначения, перепишем последнее уравнение в виде

$$\ddot{S} + 2\beta\dot{S} + \omega_0^2 S = f\cos\omega t. \quad (4.44)$$

Здесь  $f = \frac{F}{m}$ . Уравнение (4.44) – это неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. В математике доказывается, что его решением является сумма общего решения однородного дифференциального уравнения (когда правая часть в уравнении (4.44) равна нулю)  $S_1$  и частного решения неоднородного уравнения  $S_2$ .

$$S = S_1 + S_2. \quad (4.45)$$

Общее решение мы уже знаем. Оно определяется выражением (4.33):

$$S_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Частное решение можно искать двумя основными путями: строго математически (причём и в этом случае возможно несколько путей) и используя физические представления. Мы пойдём вторым путём. В самом деле, опыт и здравый смысл подсказывают нам, что если на колебательную систему воздействовать периодически изменяющейся с частотой  $\Omega$  силой, то, в конце концов, система начнёт совершать колебания с той же частотой вынуждающей силы. ***Колебания, происходящие под действием внешней, периодически изменяющейся силы, называются вынужденными колебаниями.***

Т.о., частное решение может быть записано в виде

$$S_2 = S_0 \cos(\Omega t + \varphi). \quad (4.46)$$

С пока ещё неопределёнными  $S_0$  и  $\varphi$ . Таким образом, задача нахождения частного решения свелась к определению амплитуды и фазы

колебаний. Чтобы определить их, подставим решение (4.46) в исходное уравнение (4.43). В результате получим

$$-S_0\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi) - 2\beta\Omega S_0 \sin(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 S_0 \cos(\Omega t + \varphi) = f \cos \Omega t \quad (4.47)$$

Воспользовавшись тригонометрическими формулами приведения, получим

$$-S_0\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi) = S_0\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi + \pi)$$

и

$$-2\beta\Omega S_0 \sin(\Omega t + \varphi) = 2\beta\Omega S_0 \sin(\Omega t + \varphi + \pi / 2).$$

Вместо выражения (4.47) получим

$$S_0\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi + \pi) + 2\beta\Omega S_0 \cos(\Omega t + \varphi - \pi / 2) + \omega_0^2 S_0 \cos(\Omega t + \varphi) = f \cos \Omega t \quad (4.48)$$

Сумму трёх гармонических колебаний с одной и той же частотой можно изобразить графически при помощи метода векторных диаграмм. Из рис.4.9 видно, что

$$S_0 = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (4.49)$$

и

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (4.50)$$

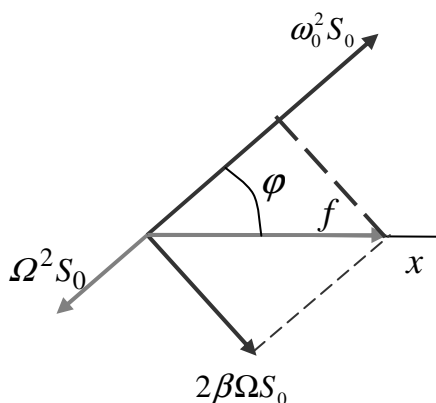


Рисунок 4.9

Общее решение однородного уравнения (4.33) можно учитывать только в начальный момент времени, до тех пор, пока амплитуда установившихся колебаний не станет равной (4.49). Для времён, больших времени релаксации, амплитуда

будет целиком определяться выражением (4.49). Видно, что амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы, и она будет максимальна, когда

знаменатель будет минимальным. Чтобы определить условие минимума знаменателя, первую производную от него приравняем нулю:

$$-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2\Omega = 0. \quad (4.51)$$

Уравнение (4.51) имеет три решения, из которых реальный физический смысл может иметь только положительная частота, при которой знаменатель в уравнении (4.49) минимален. Эта частота называется резонансной:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (4.52)$$

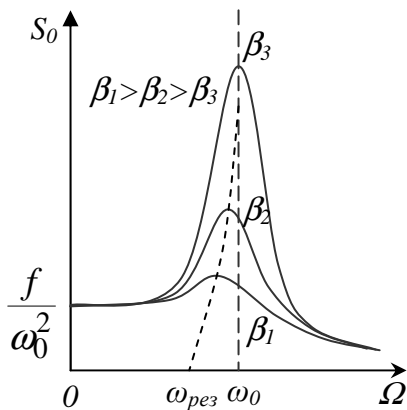


Рисунок 4.10

а *резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте называется резонансом*. Зависимость амплитуды колебаний от частоты  $\Omega$  показана на рис. 4.10. Из этого рисунка видно, что чем меньше затухание  $\beta$ , тем выше и острее максимум амплитуды и тем ближе резонансная частота к собственной.

Можно показать, что при малом затухании отношение максимальной амплитуды к *статическому смещению* (т.е. к смещению под действием постоянной силы) равно добротности колебательной системы:

$$S_0 : \frac{f}{\omega_0^2} = Q. \quad (4.53)$$

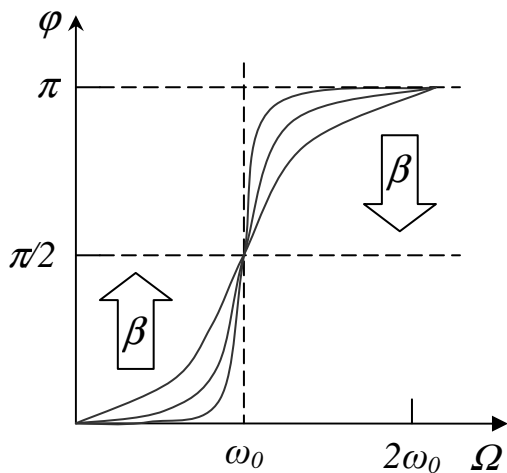


Рисунок 4.11

На рис. 4.11 показаны *фазовые резонансные кривые* – зависимости фазы колебаний от частоты вынуждающей силы при различных коэффициентах затухания  $\beta$ . Видно, что при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой независимо от величины затухания фаза

силы с собственной частотой независимо от величины затухания фаза

колебаний отстаёт от фазы вынуждающей силы на  $\pi/2$ . При дальнейшем увеличении частоты сдвиг фаз возрастает, и при  $\Omega \rightarrow \infty$  фаза колебаний становится почти полностью противоположна фазе вынуждающей силы.

#### 4.6 Общие свойства волн. Уравнение волны

Волны – это процесс распространения колебаний. Природа колебаний определяет собой природу волнового процесса. Независимо от физической природы волновые процессы имеют одинаковое математическое описание. Механические волны представляют собой процесс распространения механических колебаний в упругих средах. Механические колебания частотного диапазона от 14 Гц до 20 кГц производят субъективные ощущения звука в органах слуха и по этой причине называются звуковыми или просто звуком. Соответствующие этому диапазону волны также называют звуковыми.

Основываясь на закономерностях гармонического анализа, сложный волновой процесс можно представить как суперпозицию простейших гармонических волн. По этой причине самые общие закономерности волновых процессов могут быть получены при изучении гармонических волн.

Гармонические волны есть результат распространения гармонических колебаний. Колебания, возбужденные в некоторой части упругой среды, благодаря наличию упругих связей между ее частицами, распространяются от источника колебаний на периферию со скоростью  $v$  передачи упругих взаимодействий в соответствующей среде. Так как вынужденные колебания совершаются с частотой вынуждающей силы, то постепенно все точки среды будут совершать те же колебания, что и центр, но с задержкой во времени  $\Delta t = x/v$ , где  $x$  – расстояние до соответствующей точки.

Распространение упругих волн в среде не связано с переносом вещества. В неограниченной среде оно состоит в вовлечении в вынужденные колебания все более и более удаленных от источника волн частей среды. При этом можно отвлечься от дискретного (молекулярного) строения среды, рассматривая ее как сплошную среду, непрерывно

распределенную в пространстве и обладающую определенными упругими свойствами. Под частицей такой среды, совершающей вынужденные колебания, понимают малый элемент ее объема, размеры которого, однако, во много раз больше межмолекулярных расстояний, так что в нем содержится очень большое число молекул. Практически частицы среды можно считать точечными, так как даже в газе межмолекулярные расстояния крайне малы.

Упругая волна называется продольной, если частицы среды колеблются в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемной деформацией упругой среды и потому могут распространяться в любой среде — твердой, жидкой и газообразной. Примером являются звуковые волны в воздухе.

Упругая волна называется поперечной, если частицы среды колеблются перпендикулярно к направлению распространения волны. Поперечные волны связаны с деформацией сдвига и, следовательно, могут образовываться и распространяться только в твердых средах.

Уравнением упругой волны называется зависимость от координат и времени скалярных или векторных величин, характеризующих колебания среды при прохождении в ней рассматриваемой волны. Например, для волн в твердой среде такой величиной может служить вектор смещения частицы среды из положения равновесия или три его проекции на оси координат. Для характеристики продольных волн в газе или жидкости обычно пользуются избыточным давлением колеблющейся среды, равным разности между ее переменным и равновесным давлениями.

Лучом называется линия, касательная к которой в каждой ее точке совпадает с направлением распространения волны, т.е. с направлением переноса энергии волной. В однородной среде лучи имеют вид прямых линий.

*Волновой поверхностью* называется геометрическое место точек, в которых фаза колебаний имеет одно и то же значение. Для всех точек одной волновой поверхности величина  $\Delta t$  одинакова. Через каждую точку среды, охваченной волновым движением, можно провести одну волновую поверхность, соответствующую значению фазы колебаний в этой точке в рассматриваемый момент времени. Множеству различных значений фазы



колебания соответствует семейство волновых поверхностей. В однородной изотропной среде волновые поверхности ортогональны лучам.

В волновом процессе колебания среды распространяются на все новые области. Поверхность, которой достигла волна в данный момент времени и которая разделяет собой точки возмущенной среды от точек среды, не охваченной волновым процессом, называется *фронтом волны*. Все точки фронта волны колеблются в одинаковой фазе. По этой причине фронт волны является одной из волновых поверхностей.

Волна называется плоской, если ее волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу. В плоской волне, распространяющейся вдоль оси ОХ, все величины, характеризующие колебательное движение среды, зависят только от времени  $t$  и координаты  $x$  рассматриваемой точки М среды. Если нет поглощения волн в среде, то колебания в точке М отличаются от колебаний в начале координат О только тем, что они сдвинуты по времени на  $\Delta t$ . Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся в непоглощающей среде вдоль положительного направления оси ОХ,

$$S = A \cos(\omega(t - \Delta t) + \varphi_0) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{Tv} x + \varphi_0), \quad (4.54)$$

где  $A = \text{const}$  — амплитуда колебаний, называемая амплитудой волны;  $\omega = 2\pi/T$  — циклическая (круговая) частота волны;  $T$  — период колебаний, а  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний (в момент времени  $t=0$ ) в точках координатной плоскости  $x=0$ . Расстояние

$$\lambda = vT, \quad (4.55)$$

на которое распространяется синусоидальная волна за время, равное периоду колебаний, называется *длиной волны*. Длина волны равна расстоянию между двумя ближайшими точками среды, в которых разность фаз колебаний равна  $2\pi$ .

Наряду с длиной волны используется другая характеристика синусоидальной волны — *волновое число*:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}. \quad (4.56)$$

Поэтому уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $Ox$ , можно также представить в виде

$$S = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (4.57)$$

Волна называется сферической, если ее волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центр этих сфер называется центром волны. Такого рода волны возбуждаются в однородной изотропной среде уединенным точечным источником. Уравнение расходящейся синусоидальной сферической волны имеет вид

$$S = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (4.58)$$

где  $r$  – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки  $M$  среды;  $A(r) = a_0/r$  – амплитуда волны;  $a_0$  – физическая величина, численно равная амплитуде волны на единичном расстоянии от ее центра;  $\alpha$  – начальная фаза колебаний в центре волны.

Реальные источники волн всегда имеют конечные размеры. Однако их можно считать точечными, а волны, возбуждаемые ими в однородной изотропной среде, – сферическими, если расстояние  $r$  от источника до рассматриваемых точек среды значительно больше размеров источника. Если  $r$  очень велико, то любые малые участки волновых поверхностей практически можно считать плоскими.

Скорость  $v$  распространения синусоидальной волны называется фазовой скоростью. Она равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы синусоидальной волны. Например, в случае плоской синусоидальной волны из условия  $\omega t + kx + \varphi_0 = \text{const}$  следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v. \quad (4.59)$$

## 4.7 Волновое уравнение

Колебательные процессы всегда описываются решениями дифференциальных уравнений второго порядка. Найдем дифференциальное уравнение, решения которого описывают распространение синусоидальной волны, задаваемой формулой (4.57). Найдем вторые производные  $S$  по  $t$  и  $x$ .

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = -\omega^2 S;$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = -k^2 S = -\frac{\omega^2}{v^2} S.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \quad (4.60)$$

которое является искомым одномерным волновым уравнением. Для случая распространения волны в трехмерном пространстве можем обобщить уравнение (4.60)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (4.61)$$

Это уравнение можно записать с использованием оператора Лапласа:

$$\Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (4.62)$$

Для записи решения уравнения (4.61), соответствующего плоской волне с произвольным направлением распространения, введем волновой вектор  $\vec{k}$ , по модулю равный волновому числу  $k$  и направленный вдоль луча в рассматриваемой точке  $M$  среды. Волновой вектор плоской синусоидальной волны не зависит от выбора точки  $M$ , и уравнение такой волны можно записать в форме

$$S = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (4.63)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки М, а  $\alpha$  — начальная фаза колебаний в начале координат, т. е. в точке  $\vec{r} = 0$ . Отметим, что скалярное произведение

$$\vec{k}\vec{r} = kr \cos(\widehat{\vec{k}\vec{r}}) = kr_k,$$

где  $r_k$  — проекция радиус-вектора на направление волнового вектора. Очевидно, что проекции всех радиус-векторов, задающих точки плоскости, перпендикулярной волновому вектору, равны между собой и фаза колебаний во всех точках плоскости одинакова. Плоскости, перпендикулярные вектору  $\vec{k}$ , являются волновыми поверхностями и формула (4.63) действительно описывает плоскую волну, направление распространения которой задает вектор  $\vec{k}$ .

Проверим, действительно ли уравнение (4.63) есть решение уравнения (4.61). Для этого, используя свойства скалярного произведения векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{r}$ , запишем выражение (4.63) в виде

$$S = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha), \quad (4.63)$$

где  $k_x, k_y, k_z$  — декартовские составляющие вектора  $\vec{k}$ . Вторые производные S по координатам имеют вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -k_x^2 S;$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -k_y^2 S;$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -k_z^2 S.$$

Подстановка этих выражений в выражение (4.61) превращает уравнение в тождество

$$(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)S = k^2 S = -\frac{\omega^2}{v^2} S.$$

Остается отметить, что решением уравнения (4.61) должна являться любая функция вида

$$f(\vec{r}, t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (4.63)$$

В этом можно легко убедиться подстановкой функции в уравнение. Таким образом, решения уравнения (4.61) соответствуют распространению не только синусоидальных волн, но и модулированных волн, переносящих информацию.

#### 4.8 Скорость распространения волны в упругой среде

Рассмотрим распространение волн в твердой среде, упругие свойства которой характеризуются модулем Юнга  $E$  и модулем сдвига  $G$ . Пусть в этой среде распространяется вдоль оси  $x$  продольная плоская волна. Выделим в среде **слой толщиной  $\Delta x$  и единичной площади, перпендикулярный оси.** На рисунке 4.12 первоначальное положение слоя отмечено его пунктирным изображением. Колебания частиц среды в связи

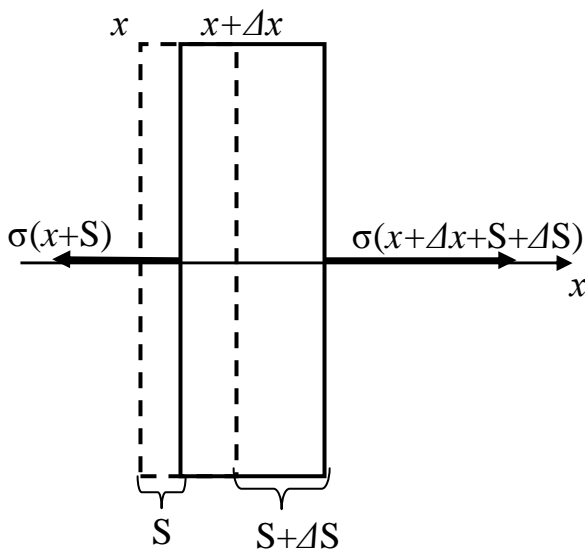


Рисунок 4.12

с прохождением волны вызывает смещение левого края слоя на расстояние  $S$ , а правого – на расстояние  $S + \Delta S$ . При этом слой деформируется, его толщина меняется на величину  $\Delta S$ . Отсюда следует, что относительная деформация слоя есть отношение  $\Delta S$  к  $\Delta x$ , в пределе, когда  $\Delta x$  стремится к нулю, для относительной деформации получается соотношение

$$\varepsilon = \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (4.64)$$

Отсюда получаем формулу для нормального напряжения  $\sigma$ , которое пропорционально относительной деформации, коэффициентом пропорциональности является модуль Юнга.

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (4.65)$$

Нормальное напряжение численно равно силе, которая действует на единицу площади слоя, растягивая или сжимая его. Тогда суммарная сила, действующая на слой единичной площади в направлении оси  $x$ , равна

$$\begin{aligned} F_x &= \sigma(x + S + \Delta x + \Delta S) - \sigma(x + S) = \\ &= \sigma(x + S) + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{x+S} (\Delta x + \Delta S) - \sigma(x + S) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{x+S} \Delta x. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Здесь произведено разложение функции  $\sigma(x+S+\Delta x+\Delta S)$  в ряд по степеням малой величины  $(\Delta x+\Delta S)$  с учетом членов разложения не выше первого порядка малости и затем учтено, что величина деформации  $\Delta S$ , в свою очередь, много меньше, чем размер деформируемого тела  $\Delta x$ .

Формулу (4.66) с учетом формулы (4.65) можно преобразовать к виду

$$F_x = E \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Delta x. \quad (4.67)$$

Ускорение выделенного слоя под действием этой силы, согласно второму закону Ньютона,

$$a = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{F_x}{m}, \quad (4.67)$$

где масса слоя единичной площади  $m = \rho V = \rho \Delta x$ . Здесь  $\rho$  – плотность вещества упругой среды, а объем слоя единичной площади численно равен

его толщине. Подстановка выражений для массы и силы в формулу (4.67) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \quad (4.68)$$

которое является одномерным волновым уравнением типа (4.60). Его решения описывают распространение в упругой среде волн со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4.69)$$

Аналогичные вычисления для поперечных волн приводят к выражению для их скорости распространения

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (4.70)$$

#### 4.9 Скорость распространения волны в газе

По отношению к деформациям растяжения и сжатия газ является упругой средой, в нем могут распространяться продольные волны. Рассмотрим распространение в газе вдоль оси  $x$  плоской продольной

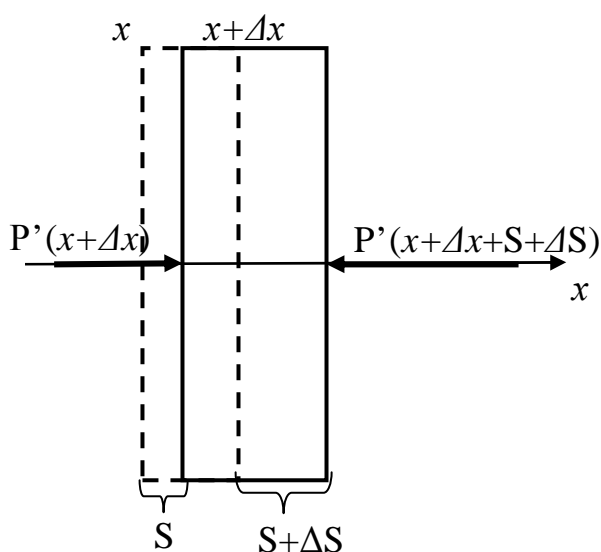


Рисунок 4.13

волны. Выделим в газе слой толщиной  $\Delta x$  и единичной площади, перпендикулярный оси (рис. 4.13). В данном случае роль нормального напряжения  $\sigma$ , т.е. силы, действующей на единицу площади слоя, играет давление газа  $P'$ , которое может быть представлено как сумма

$$P' = P + \Delta P, \quad (4.71)$$

где  $P$  – среднее давление газа, а

$\Delta P$  – периодически изменяющееся отклонение от среднего значения. Повторяя рассуждения, которые привели к формуле (4.66) для силы, действующей на слой единичной площади, получим в данном случае

$$F_x = -\frac{\partial P'}{\partial x} \Delta x. \quad (4.72)$$

Использование этого выражения во втором законе Ньютона приведет к уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial x}, \quad (4.73)$$

где  $\rho$  – плотность газа. При распространении в газе звуковой волны процессы сжатия и расширения происходят настолько быстро, что их можно считать адиабатическими. Для выделенного слоя газа можно записать уравнение Пуассона

$$PV^\gamma = P'(V + \Delta V)^\gamma.$$

Из рисунка 4.13 видим, что объем недеформированного слоя единичной площади  $V$  численно равен его толщине  $\Delta x$ , а изменение объема  $\Delta V$  – величине  $\Delta S$ . С учетом этого уравнение Пуассона можно представить в виде

$$P(\Delta x)^\gamma = P'(\Delta x)^\gamma \left(1 + \frac{\Delta S}{\Delta x}\right)^\gamma.$$

После сокращения и перехода к пределу  $\Delta x \rightarrow 0$  получаем

$$P = P' \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x}\right)^\gamma.$$

Будем рассматривать случай, когда  $\frac{\partial S}{\partial x} \ll 1$ , что соответствует малости изменения толщины слоя газа по сравнению с самой толщиной. В этом случае



$$\left(1 + \frac{\partial S}{\partial x}\right)^\gamma \approx \left(1 + \gamma \frac{\partial S}{\partial x}\right),$$

а

$$P' = \frac{P}{1 + \gamma \frac{\partial S}{\partial x}} \approx P \left(1 - \gamma \frac{\partial S}{\partial x}\right).$$

Дифференцируем последнее выражение по  $x$  и получаем

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = -\gamma P \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}. \quad (4.74)$$

Подстановка выражения (4.74) в выражение (4.73) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma P} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (4.75)$$

Коэффициент перед второй производной величины  $S$  по времени можно преобразовать с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M} RT,$$

где  $m$  – масса газа,  $M$  – его молярная масса,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура. Отсюда следует:

$$P = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} = \rho \frac{RT}{M}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (4.75) приводит волновое уравнение для газов к его окончательной форме

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{M}{\gamma RT} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (4.76)$$

Сравнение формулы (4.76) с формулой (4.60) позволяет получить формулу для скорости распространения звука в газе

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}. \quad (4.77)$$

Вычисление по этой формуле скорости звука в воздухе при нормальных условиях дает значение 340 м/с.

#### 4.10 Перенос энергии упругой волной. Интенсивность волны

При распространении волны в упругой среде происходит ее деформация, что обуславливает наличие у среды потенциальной энергии. Потенциальная энергия элементарного объема  $dV$  упруго деформированной среды определяется по формуле

$$dW_{II} = \frac{E\varepsilon^2}{2} dV = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 dV, \quad (4.78)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\varepsilon$  – величина относительной деформации объема  $dV$ . Из формулы (4.69) следует

$$E = \rho v^2,$$

а из выражения для смещения частиц упругой среды (4.57) с учетом выражения (4.56)

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\omega}{v} A \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right).$$

Подстановка этих выражений в формулу (4.78) приводит к следующей формуле для потенциальной энергии элементарного объема упругой среды:

$$dW_{II} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right) dV. \quad (4.79)$$

Кинетическая энергия элементарного объема среды  $dV$ , масса которого  $m = \rho dV$ , равна

$$dW_K = \frac{mu^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 dV,$$

где  $u$  – скорость движения частицы упругой среды. Из выражения для смещения частиц упругой среды (4.57) с учетом уравнения (4.56)

$$u = \frac{\partial S}{\partial t} = \omega A \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right).$$

Подстановка этого выражения в формулу (4.79) приводит к следующей формуле для кинетической энергии элементарного объема упругой среды:

$$dW_K = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right) dV. \quad (4.80)$$

Полная механическая энергия элементарного объема упругой среды

$$dW = dW_K + dW_{II} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right) dV. \quad (4.81)$$

Средняя энергия элементарного объема упругой среды

$$\langle dW \rangle = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2} dV, \quad (4.82)$$

так как средний квадрат синуса равен  $1/2$ . Отсюда определяем среднюю объемную плотность энергии

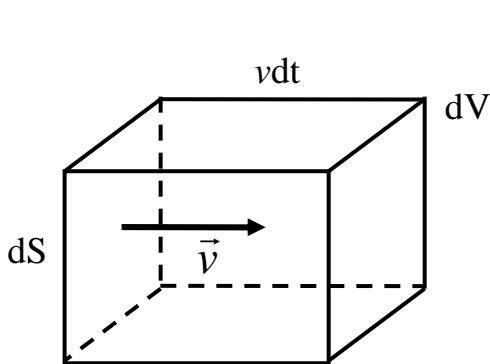


Рисунок 4.14

$$\langle w \rangle = \frac{dW}{dV} = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2}. \quad (4.83)$$

Пусть элементарный объем  $dV$  представляет собой параллелепипед, боковая сторона которого имеет площадь  $dS$ , а перпендикулярная к ней грань длину  $vdt$ , где  $v$  – скорость распространения волны (рис. 4.14). Если

в нулевой момент времени через сторону параллелепипеда  $dS$  перпендикулярно ей начнет распространяться волна, то за время  $dt$  она займет весь объем  $dV = dSvdt$ . Это означает, что за время  $dt$  через площадку  $dS$  пройдет энергия

$$\langle dW \rangle = \langle w \rangle dV = \langle w \rangle v dS dt .$$

Перенос энергии можно задать с помощью средней плотности потока энергии

$$I = \frac{\langle dW \rangle}{dS dt} = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 . \quad (4.84)$$

Эта величина называется также *интенсивностью волны*. Формула (4.84) показывает, что интенсивность волны в каждой точке пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Плотность потока энергии можно определить в каждой точке пространства и в каждый момент времени как вектор, направление которого задает направление распространения волны. Он называется вектором Умова и равен

$$\vec{U} = w \vec{v} . \quad (4.85)$$

#### 4.11 Интерференция волн. Стоячие волны

Если в какой-либо области пространства распространяются одновременно несколько волн, то в каждой точке происходит сложение нескольких колебаний. Это может привести к явлению интерференции, когда в различных точках интенсивность результирующей волны окажется различной, возникнут максимумы и минимумы интенсивности. Условиями наблюдения интерференции являются совпадение направлений колебания в накладываются волнах, равенство частот колебаний и постоянство разности фаз во всех точках наложения. Волны, удовлетворяющие этим условиям, называются *когерентными*. При наложении когерентных волн квадрат амплитуды результирующих колебаний в каждой точке определяется формулой (4.9)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  – разность фаз накладывающихся колебаний. Интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, значит, для интенсивности можно записать соотношение

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.86)$$

Из формул (4.54) и (4.55) следует, что разность фаз колебаний, обусловленных наложением в точке двух волн,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} + const, \quad (4.87)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – расстояния, проходимые волнами от источников до точек наложения. Величина  $\Delta x = x_2 - x_1$  называется *разностью хода волн*, именно она определяет результат интерференции в каждой точке. В местах, где  $\varphi_2 - \varphi_1$  близко к четному числу, умноженному на  $\pi$ , наблюдаются максимумы интенсивности волны. Там же, где  $\varphi_2 - \varphi_1$  близко к нечетному числу  $\pi$ , наблюдаются минимумы интенсивности.

Частным случаем интерференции волн являются *стоячие волны*. Они образуются в результате наложения двух бегущих синусоидальных волн, которые распространяются навстречу друг другу и имеют одинаковые частоты, амплитуды и направления колебаний. Обычно это происходит при отражении бегущей волны от препятствия. Рассмотрим простейший случай, когда прямая и обратная волны распространяются вдоль оси  $x$  и описываются формулами:

$$S_{np} = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right);$$

$$S_{обр} = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x\right).$$

В каждой точке оси происходит сложение этих колебаний. Используем тригонометрическую формулу суммы двух косинусов:

$$S = S_{np} + S_{обр} = 2A \cos\left(\frac{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x}{2}\right) =$$

$$= 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t). \quad (4.88)$$

Формула (4.88) описывает происходящие во всей области колебания, амплитуда которых различна в различных точках. На рисунке 4.15 представлен график зависимости амплитуды от координаты  $x$ .

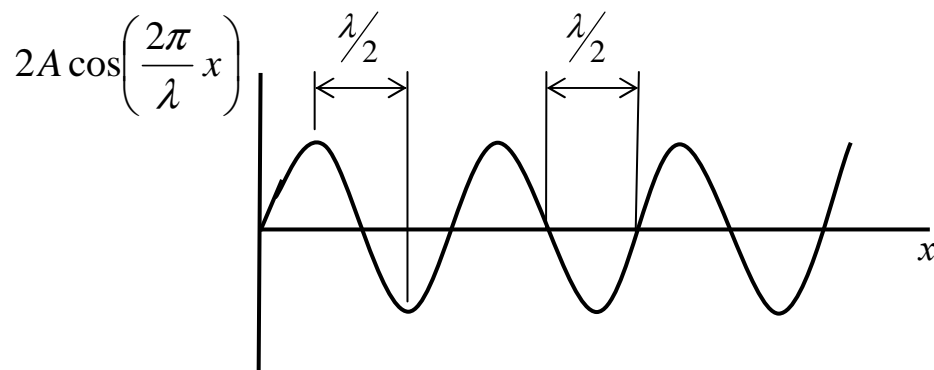


Рисунок 4.15

График показывает, что имеются точки, в которых амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются *узлами*. Имеются также точки, в которых амплитуда достигает максимального значения  $2A$ . Эти точки называются *пучностями*. Расстояние между соседними узлами и соседними пучностями одинаково, оно равно половине длины волны. Из формулы (4.88) видим, что колебания в промежутке между соседними узлами происходят в одной фазе, но при переходе через узел фаза колебаний **меняется на величину  $\pi$**  **представлен график зависимости амплитуды  $\pi$ .**

В стоячей волне происходит обмен энергией между узлами, где она кинетическая, и соседними с ними пучностями, где она превращается в потенциальную энергию силы упругости. Средний поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

## 4.12 Волновой пакет. Групповая скорость волн

Основываясь на принципе суперпозиции волн, можно заменить любую несинусоидальную волну в линейной среде эквивалентной ей системой синусоидальных волн, т.е. представить в виде группы волн или волнового пакета. Совокупность значений частот этих синусоидальных волн называется спектром частот (или просто спектром) рассматриваемой несинусоидальной волны. В зависимости от характера колебаний, возбуждаемых волной, спектр частот последней может быть дискретным или непрерывным.

Закономерность распространения в линейной среде произвольного возмущения (сигнала), представляющего собой несинусоидальную волну, проста только при условии, что среда недиспергирующая, т.е. фазовая скорость волн не зависит от их частоты. В этом случае сигнал перемещается в среде, не изменяясь, так как все синусоидальные волны, образующие эту группу, имеют одинаковые фазовые скорости, равные скорости сигнала.

В диспергирующей среде синусоидальные составляющие группы волн распространяются с разными скоростями. Поэтому группа волн по мере распространения расплывается, форма сигнала изменяется.

Простейшей группой волн является квазисинусоидальная плоская волна, получающаяся в результате наложения двух распространяющихся вдоль оси  $x$  плоских волн с одинаковыми амплитудами и близкими по значению частотами и волновыми числами:

$$S_1 = A_0 \cos(\omega t - kx);$$
$$S_2 = A_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x].$$

Тогда отклонение частицы среды в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$

$$S = S_1 + S_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos(\omega t - kx). \quad (4.89)$$

Зависимость  $S(x)$  в некоторый момент времени  $t$  показана на рисунке 4.16.

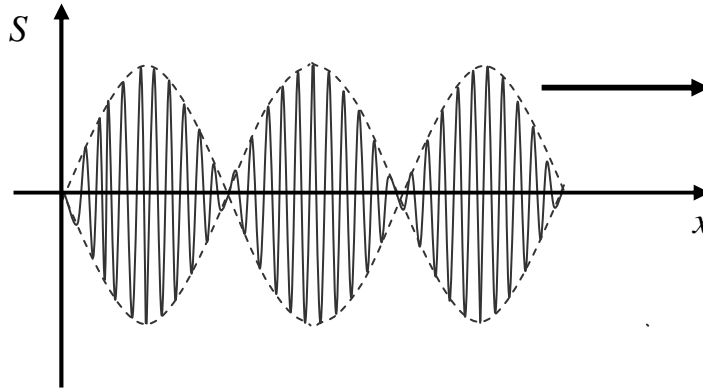


Рисунок 4.16

Эта волна отличается от синусоидальной тем, что ее амплитуда – медленно изменяющаяся функция координаты  $x$  и времени  $t$

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right). \quad (4.90)$$

За скорость распространения этой несинусоидальной волны принимают скорость  $u$  точки, в которой амплитуда  $A$  имеет какое-либо фиксированное значение. Координата этой точки должна удовлетворять условию

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = const.$$

Дифференцируя это соотношение, получим для скорости  $u$  выражение

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

которое в пределе бесконечно малых изменений величин переходит в

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.91)$$

Величина  $u$  называется групповой скоростью. Она равна скорости переноса энергии квазисинусоидальной волной. Групповая скорость (4.91) пригодна для описания переноса энергии (передачи сигнала) посредством



несинусоидальных волн, имеющих другой спектр частот, при условии, что спектр не очень широк, а дисперсия волн в среде для этих частот мала.

Связь между групповой и фазовой скоростями волны можно найти из формулы (4.91) при учете соотношений для  $k$  (4.56):

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (4.92)$$

где  $\lambda$  – длина волны.

### 4.13 Электромагнитные волны

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме (3.112)...(3.115) для случая, когда все пространство заполняет однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ , а свободные заряды и токи отсутствуют, могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (4.94)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – напряженности электрического и магнитного полей  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные. Уравнения (4.93) и (4.94) являются частными случаями волнового уравнения (4.61) и описывают распространение в пространстве электромагнитных волн со скоростью

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (4.95)$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}, \quad (4.95)$$

есть скорость распространения электромагнитной волны в вакууме. Эта скорость является постоянной величиной и не зависит от выбора системы

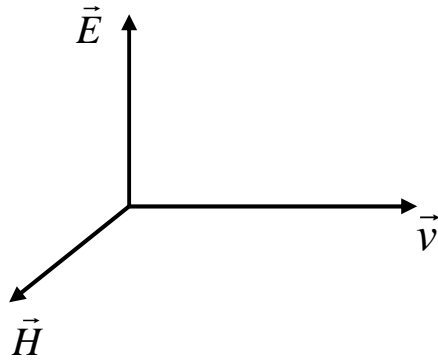


Рисунок 4.17

отсчета. Из уравнений Максвелла также следует, что вектора напряженности электрического и магнитного полей при своих колебаниях всегда остаются перпендикулярными друг другу и направлению распространения волны (рис. 4.17). Таким образом, электромагнитная волна является поперечной. Фазы колебаний векторов

$\vec{E}$  и  $\vec{H}$  совпадают, между их амплитудными значениями устанавливается соотношение

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0} . \quad (4.96)$$

Сравнение свойств электромагнитных волн, следующих из решения уравнений Максвелла, со свойствами волн световых показало, что свет – электромагнитные волны. Первые не световые электромагнитные волны (радиоволны) были открыты в 1888 Г.Герцем. В дальнейшем были открыты электромагнитные волны с длинами меньшими, чем световые – рентгеновские лучи и радиоактивное гамма-излучение.

Электромагнитные волны переносят энергию. Плотность потока энергии можно получить таким же образом, как она получена для упругих волн, т.е. использовать формулу (4.85). Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Пойнтинга и обозначается  $\vec{S}$ . Его модуль  $S= wv$ , плотность энергии электромагнитного поля  $w$  складывается из плотностей энергии электрического и магнитного полей:

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} .$$

Учитываем соотношение между напряженностями полей (4.93) и получаем

$$w = 2w_E = \epsilon \epsilon_0 E^2 . \quad (4.97)$$

Еще раз учитываем в формуле (4.97) соотношение (4.96), из него следует

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH = \frac{1}{v}EH. \quad (4.98)$$

Отсюда для плотности потока электромагнитной энергии следует

$$S = wv = EH. \quad (4.99)$$

Учитывая направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , можно представить вектор Пойнтинга в виде векторного произведения

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (4.100)$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Бушок, Г.Ф.** Курс физики. Кн. 1 / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовский, Г. Ф. Пивень. – К. : Лыбидь, 2001. – 346 с. – .....
- 2 **Бушок, Г.Ф.** Курс физики. Кн. 2 / Г. Ф. Бушок, Э. Ф. Венгер. – К. : Лыбидь, 2001. – 428 с. – .....
- 3 **Детлаф, А.А.** Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высш. шк., 1989. – 607 с.
- 4 **Савельев, И.В.** Курс общей физики. Т.2 / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1986. – 432 с.
- 5 **Яворский, Б.М.** Справочник по физике / Б. М. Яворский. – М. : Наука, 1985. – 512 с.

*Навчальне видання*

**КОСТЕНКО** Володимир Михайлович,  
**ТУЛУПЕНКО** Віктор Миколайович

**ЕЛЕКТРОСТАТИКА. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ.  
ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ**

Курс лекцій з дисципліни «**Фізика**»

(для студентів усіх спеціальностей вузу)

*(Російською мовою)*

Редактор

О.О.Дудченко

Комп'ютерна верстка

О.П.Ордіна

226/2007 Підп. до друку	Формат 60x84/16
Папір офсетний. Ум. друк.арк	. Обл.-вид.арк. .
Тираж прим.	Зам.№

Видавець і виготівник  
«Донбаська державна машинобудівна академія»  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного  
реєстру  
серія ДК №1633 від 24.12.2003 р.



**В.М.Костенко, В.Н.Тулупенко**

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА.  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.  
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.  
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА»**

**Министерство образования и науки Украины  
Донбасская государственная машиностроительная академия**

**В.М.Костенко,  
В.Н.Тулупенко**

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА.  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.  
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.  
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА»  
(для студентов всех специальностей вуза)**

В печать 200 экз.  
Первый проректор  
А.Н.Фесенко

Утверждено на заседании  
ученого совета ДГМА  
Протокол № от

**Краматорск 2007**